T S 4, 5, 8
- Durée 2 h
- le 16 octobre 2018
- Une seule calculatrice autorisée

Devoir Surveillé n°2

Barème indicatif :
1) 6 points
2) 7 points
3) 7 points

Commentaires : *Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées . Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage ...*

Exercice 1 : (6 points)

Les 300 personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de trois niveaux ont répondu aux deux questions suivantes :

« À quel niveau est votre bureau? » et « Empruntez-vous l'ascenseur ou l'escalier pour vous y rendre? »

Voici les réponses :

- 225 personnes utilisent l'ascenseur et, parmi celles-ci, 50 vont au 1er niveau, 75 vont au 2^e niveau et 100 vont au 3^e niveau.
- Les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au 2^e niveau, les autres vont au 1er niveau.

On choisit au hasard une personne de cette population. On pourra considérer les évènements suivants :

- N_1 : « La personne va au premier niveau.»
- N_2 : « La personne va au deuxième niveau.»
- N_3 : « La personne va au troisième niveau.»
- E : « La personne emprunte l'escalier.»

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. a. Montrer que la probabilité que la personne aille au 2ème niveau par l'escalier est égale à $\frac{1}{12}$.

   b. Montrer que les évènements N_1, N_2 et N_3 sont équiprobables.

   c. Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au 2ème niveau.
3. On interroge désormais 20 personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.

   On appelle X la variable aléatoire qui, aux 20 personnes interrogées, associe le nombre de personnes allant au 2^e niveau.

   a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

   b. Déterminer, à 10^{-4} près, la probabilité que 5 personnes exactement aillent au 2^e niveau.

   c. En moyenne sur les 20 personnes, combien vont au 2^e niveau?
4. Soit n un entier inférieur ou égal à 300. On interroge désormais n personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.

   Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'évènement « au moins une personne va au 2^e niveau» soit supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 2 : (7 points)

Au cours d'une séance, un joueur de tennis s'entraîne à faire des services.

Pour tout entier naturel non nul, on note :

- R_n l'évènement «le joueur réussit le n-ième service»,
- $\overline{R_n}$ l'évènement contraire.

Soit x_n la probabilité de R_n et y_n celle de $\overline{R_n}$.

La probabilité qu'il réussisse le premier service est égale à 0,7.

On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées :

– si le joueur réussit le n-ième service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut 0,8;

– si le joueur ne réussit pas le n-ième service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut 0,7.

1. On s'intéresse aux deux premiers services de l'entraînement.

   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de services réussis sur ces deux premiers services.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X. (On pourra utiliser un arbre de probabilité).

   b. Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.

2. On s'intéresse maintenant au cas général.

   a. Donner les probabilités conditionnelles $P_{R_n}(R_{n+1})$ et $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$.

   b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $x_{n+1}=0{,}1\,x_n+0{,}7$.

3. Soit la suite u_n définie pour tout entier naturel non nul par $u_n=9x_n-7$.

   Dans ces deux questions, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

   a. Déterminer la nature de la suite (u_n).
   b. En déduire la limite de la suite (x_n).

Exercice 3 : (7 points)

On considère la fonction f définie sur R par : $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$.

Soit a un réel positif. On définit la suite (u_n) par :

$$u_0=a \text{ et, pour tout entier naturel } n : \quad u_{n+1}=f(u_n).$$

Le but de cet exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$, suivant différentes valeurs de son premier terme $u_0=a$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$, pour a = 2, 9 puis pour a = 3, 1.

2. Dans cette question, on suppose que la suite (u_n) converge vers un réel L. Montrer que les valeurs possibles de L sont 1 et 3. Pour cette question, on pourra admettre que $\lim_{n\to+\infty} f(u_n)=f(L)$.

3. Dans cette question, on prend a = 2, 9.

   a. Montrer que f est croissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

   b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $1\leq u_{n+1}\leq u_n$.

   c. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

4. Dans cette question, on prend a = 3, 1 et on admet que la suite (u_n) est croissante.

   a. À l'aide des questions précédentes montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.

   b. En déduire le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

   c. L'algorithme suivant calcule le plus petit rang p pour lequel $u_p>10^6$.

```
P ← 0
U . . . . . .

Tant que . . .
   P ← . . . . . .
   U ← . . . . . .
Fin Tant que

Afficher . . . .
```

Recopier et compléter cet algorithme.

P est un nombre entier et U est un nombre réel.

Correction :

Exercice 3 : (7 points)

1.

	A	B	C
1	0	2,9	3,1
2	1	2,805	3,205
3	2	2,6290125	3,4310125
4	3	2,326840863	3,954910888
5	4	1,880253337	5,365749177
6	5	1,387422969	10,52988294
7	6	1,075048278	46,4093344
8	7	1,002816122	1032,003825
9	8	1,000003965	531485,4438
10	9	1	1,41238E+11
11	10	1	9,97407E+21
12	11	1	4,9741E+43
13	12	1	1,23708E+87

Si a=2,9 , il semble que la suite (u_n) est décroissante et tend vers 1.

Si a=3,1, il semble que la suite (u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.

2.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = L$

On a aussi $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n{}^2-u_n+\frac{3}{2}==f(u_n)$

Par continuité (par encore vu) ou opérations sur les limites on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\frac{1}{2}L^2-L+\frac{3}{2}$

Par unicité de la limite, on a :

$L=\frac{1}{2}L^2-L+\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2L=L^2-2L+3 \Leftrightarrow L^2-4L+3=0 \Leftrightarrow L=1$ ou $L=3$

(solutions évidentes)

3. a. Trivial : dérivée ou trinôme du second degré

b. On note P_n : « $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$ » pour $n\in\mathbb{N}$

Initialisation :

$u_0=2,9$ et $u_1=2,805$. P_1 est donc vraie.

Hérédité :

Supposons P_n vraie pour $n\in\mathbb{N}$ fixé, c'est à dire $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$. (HR)

Montrons que P_{n+1} est vraie, c'est à dire $1\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}$

On a (HR) : $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$

$\Rightarrow f(1)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(u_n)$ car f est croissante sur $[1;\infty[$

$\Rightarrow 1\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}$

Conclusion :

P_n est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Et donc la suite (u_n) est décroissante.

c. (u_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente . La seule limite possible est donc 1 .

3.a.

Supposons que (u_n) soit majorée.

Etant donné qu'elle est croissante, elle serait convergente vers un réel $L\geqslant u_0$.

Or $u_0=3,1$ et les deux seules limites possibles sont 1 et 3 .

Ce qui est absurde :)

Donc (u_n) n'est pas majorée.

b. (u_n) est croissante et non majorée, elle diverge donc vers $+\infty$.

c.

```
P ← 0
U ← 3,1
Tant que U ⩽ 10^6
P ← P+1
U ← 1/2 U² − U + 3/2
Fin Tant que
```

Exercice 1 :

https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_Amerique_Sud_S_nov_2012.pdf (ex3)

Exercice 2 :

https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_Polynesie_S_sept_2011.pdf (ex2)