LYCEE LYAUTEY - BAC BLANC - CORRIGÉ

Hassen Moustaine

14 décembre 2018

1 Affirmation 1

L'affirmation est **vraie**. En effet :
$3^3 = 27 = 1 + 2 \times 13 \equiv 1[2]$ Par compatibilité de la congruence avec les puissances entières positives, on a pour tout entier naturel n :
$(3^3)^n \equiv 1^n[2]$, c'est-à-dire $3^{3n} \equiv 1[2]$, ce qui prouve le résultat.

2 Affirmation 2

L'affirmation est **fausse**. -1 est une solution(et toutes les solutions sont de la forme $5 + 6k$, avec $k \in Z$). En effet :
$5 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 1 = 6 \equiv 0[6]$, et pourtant l'on n'a pas $-1 \equiv 1[6]$.

3 Affirmation 3

L'affirmation est **vraie**. Il suffit de trouver le reste de la division euclidienne de 2^{2018} par 10. Pour cela voit que pour tout entier naturel non nul n : $2^{4n+2} \equiv 4[10]$ (en effet, une première puissance de 2 vaut 4 quand l'exposant vaut 2 et une seconde puissance vaut 4 quand l'exposant vaut 6). En effet, on démontre d'abord par récurrence que pour tout entier naturel n, $6^n \equiv 6[10]$. C'est vrai pour $n = 1$. Ensuite, si c'est vrai pour un entier n fixé,alors $6^{n+1} = 6^n \times 6$, et l'hypothèse de récurrence donne par compatibilité de la congruence avec la multiplication :
$6^{n+1} = 6^n \times 6 \equiv 6 \times 6[10] = 36[10] = 6[10]$.
Ensuite,on a $2^{4n+2} = 2^{2(2n+1)} = 4^{2n+1} = (4^2)^n \times 4$.
De plus, $4^2 = 16 \equiv 6[10]$, d'où, à nouveau par compatibilité : $(4^2)^n \times 4 \equiv 6 \times 4[10] = 24[10] = 4[10]$.
Enfin, on vérifie que $2018 = 4 \times 504 + 2$, ce qui permet de conclure que :$2^{2018} \equiv 4[10]$. D'où le résultat.

Remarque :Réponse comptée juste pour un élève ayant remarqué la périodicité sans la démonstration.

4 Affirmation 4

L'affirmation est **fausse**. En effet, $A^2 = B^2 + I \iff A^2 - B^2 = I$, mais le membre de gauche ne peut pas se factoriser en général par $(A-B)(A+B)$, puisque les matrices ne commutent pas, on ne peut donc pas apriori pasen déduire que $A - B$ soit l'inverse de $A + B$.
Pour prouver qu'elle n'est en général pas inversible, on donne un **contre-exemple**.
Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et B la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

.
Alors, d'une part, on a :
$A + B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et d'autre part :
$A^2 - B^2 = I$.
Il est clair que $A + B$ n'est pas inversible(puique son déterminant est nul).
Remarque :Réponse comptée juste pour un élève n'ayant pas trouver de contre-exemple mais ayant soulever le problème de la non-commutativité de A et B.

5 Affirmation 3

L'affirmation est **vraie**. On le démontre par récurrence. L'affirmation est vraie pour $n = 0$, puisque tout entier non nul divise lui-même. Supposons l'affirmation vraie à un rang n fixé. Alors :
$u_0 | u_n$. Or par hypothèse, $u_n | u_{n+1}$ et la divisibilité est transitive (cours). Par conséquent, $u_0 | u_{n+1}$ et l'hérédité est établie.