Exercice 4 : non spécialité. 5 points

1. Affirmation 1 : L'ensemble des solutions de l'inéquation $e^{-2x+1} > \frac{1}{e^2}$ est S= $]-\infty; \frac{3}{2}[$.

$e^{-2x+1} > \frac{1}{e^2} \Leftrightarrow e^{-2x+1} > e^{-2}$ car $e^2 \times e^{-2} = 1$.

$e^{-2x+1} > \frac{1}{e^2} \Leftrightarrow -2x+1 > -2$ car *exp* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$e^{-2x+1} > \frac{1}{e^2} \Leftrightarrow -2x > -3 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$. D'où S=$]-\infty ; \frac{3}{2}[$. **Affirmation 1 vraie.**

2. Affirmation 2 : L'ensemble des solutions de l'inéquation $(e^x + e^2)(1 - e^x) \geqslant 0$ est S=[-2; 0].

pour tout x réel, $e^x > 0$ donc $e^x + e^2 > e^2 > 0$ alors $(e^x + e^2)(1 - e^x)$ est du signe de $(1 - e^x)$

or $1 - e^x \geqslant 0 \Leftrightarrow e^0 \geqslant e^x \Leftrightarrow 0 \geqslant x$ donc S $=]-\infty; 0]$. **Affirmation 2 fausse.**

3. Affirmation 3 : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison a et (v_n) la suite, définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \exp(u_n)$. On calcule v_{n+1} , pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = e^{u_{n+1}} = e^{u_n + a}$ car (u_n) est une suite arithmétique de raison a. D'où , $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = e^a \times e^{u_n} = e^a \times v_n$. Cela signifie que (v_n) est une suite géométrique de raison e^a . **Affirmation 3 vraie.**

4. Affirmation 4 : La suite (u_n) est une suite positive. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$ pour tout entier naturel n.

Si (u_n) est une suite positive qui converge alors il existe un réel a tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ avec $a \geqslant 0$. On a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + u_n) = 1 + a > 0$ donc par quotient, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \frac{a}{1+a}$ et la suite (v_n) converge.
Affirmation 4 vraie.

5. Affirmation 5 : La courbe d'équation $y = x\sqrt{x(3-x)}$ admet une tangente horizontale au point de coordonnées $(0;0)$. Soit $f : f(x) = x\sqrt{x(3-x)}$. On considère le taux d'accroissement de f en 0 :

$\tau(h) = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h\sqrt{h(3-h)} - 0}{h} = \sqrt{h(3-h)}$. $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = 0$.

$(T_0) : y = f'(0)(x-0) + f(0) = 0$. **Affirmation 5 vraie.**