Exercice : (6 points)

Partie A :

1. On a $x+5 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $e^X \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par composée $e^{x+5} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,

et comme $x+3 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par produit $(x+3)e^{x+5} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Il s'ensuit par somme $e^{x+5}\ (x+3)+1 = g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

2. $g(x) = e^{x+5}\ (x+3)+1 = \left(xe^x\right)e^5 + 3e^5\left(e^x\right)+1$

Comme $xe^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ et $e^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, par produits et par sommes

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(xe^x\right)e^5 + 3e^5\left(e^x\right)+1 = 0+0+1 = 1$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$

3. $g'(x) = (x+3)'e^{x+5}\ +(x+3)(x+5)'e^{x+5}$ par formules de dérivation du produit et de la composée

$g'(x) = e^{x+5}\ +(x+3)e^{x+5} = e^{x+5}(x+4)$.

e^{x+5} >0 pour tout réel x, le signe de g'(x) est donc celui de x+4 :

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\ 4$ et $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -\ 4$

x	$-\infty$	α	-4	β	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	1 ↘		$-e+1$	↗	$+\infty$

4. g est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $\left]-\infty;-4\right]$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$ et $g(-4) = -e+1 < 0$, donc $0 \in \left]-\infty;-e+1\right]$,

Il en résulte d'après le corollaire du T.V.I, qu'il existe un unique réel $\alpha \in \left]-\infty;-e+1\right[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe unique $\beta \in \left]-e+1;+\infty\right[$ tel que $g(\beta) = 0$.

Par conséquent, g s'annule exactement deux fois.

5. Sachant que $-6{,}15 < \alpha < -6{,}14$, et comme $g(-3{,}16) \approx -0{,}007 < 0$ et $g(-3{,}16) \approx +0{,}046 > 0$, donc $-3{,}16 < \beta < -3{,}15$

6.

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
Signe de g(x)		+	0	-	0	+	

Partie B :

1. $f'(x) = \left(x^3\right)'\left(e^{x+5}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(x^3\right)\left(e^{x+5}+\dfrac{1}{3}\right)' = 3x^2\left(e^{x+5}+\dfrac{1}{3}\right)+x^3((x+5)'e^{x+5})$

$$= x^3e^{x+5} + 3x^2e^{x+5} + x^2 = x^2\left(xe^{x+5}+3e^{x+5}+1\right) = x^2\left((x+3)e^{x+5}+1\right)$$

donc $f'(x) = x^2g(x)$

2. Sachant que $x^2 \geq 0$, le signe de $f'(x)$ est donc le même que celui de $g(x)$.

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

3. $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow (\alpha+3)e^{\alpha+5}+1=0$

$$e^{\alpha+5}=-\frac{1}{\alpha+3}\ (\alpha\neq -3)$$

donc $f(\alpha)=\alpha^3\left(e^{\alpha+5}+\frac{1}{3}\right)=\alpha^3\left(\frac{-1}{\alpha+3}+\frac{1}{3}\right)$

soit $f(\alpha)=\frac{\alpha^4}{3(\alpha+3)}$

Un calcul similaire montre que $f(\beta)=\frac{\beta^4}{3(\beta+3)}$

Partie C :

1. $h'(x)=\frac{(x^4)'(3x+9)-x^4(3x+9)'}{(3x+9)^2}=\frac{4x^3(3x+9)-3x^4}{(3x+9)^2}$

après simplification on trouve $h'(x)=\frac{x^4+4x^3}{(x+3)^2}=\frac{x^3(x+4)}{(x+3)^2}$

Comme $(x+3)^2>0$, alors alors $h'(x)$ est du signe de $x^3(x+4)>0$

Tableau de Signe de *h’*

x	$-\infty$		-4		-3
x^3		-		-	
$x+4$		-	0	+	
$h'(x)$		+	0	-	‖

Variations de *h*

x	$-\infty$	α	-4	β	-3
$h'(x)$		$+$	0	$-$	‖
h		$\nearrow$		$\searrow$	‖

2. *h* est strictement croissante sur $]-\infty;-4]$, donc, d’après le 5. de la partie A

$-6{,}15<\alpha<-6{,}14 \Rightarrow h(-6{,}15)<h(\alpha)<h(-6{,}14)$

or $h(-6{,}15)=-151{,}38$, $h(-6{,}14)=-150{,}877$ et $h(\alpha)=f(\alpha)$,

d'où $-151{,}38<f(\alpha)<-150{,}877$

Comme *h* est strictement décroissante sur $[-4;-3[$, on obtient de même : $-207{,}734<f(\beta)<-218{,}791$