1. a. $u_1=\dfrac{3u_0}{1+2u_0}=\dfrac{\dfrac{3\times 1}{2}}{1\times 2\dfrac{1}{2}}=\dfrac{3}{4}$ et $u_2=\dfrac{3u_1}{1+2u_1}=\dfrac{\dfrac{3\times 3}{4}}{1\times 2\dfrac{3}{4}}=\dfrac{9}{10}$

b. Pour tout entier naturel *n*, notons P_n : « $0<u_n$ »

— Initialisation : Si n =0 alors $u_0=\dfrac{1}{2}>0$, donc P_0 est vraie

— Hérédité : Supposons que pour *k* entier naturel fixé, on ait P_k vraie (c-à-d. $0<u_k$).
Montrons que P_{k+1} est vraie aussi (c-à-d. $0<u_{k+1}$).
Par hypothèse de récurrence $0<u_k$ donc $0<3u_k$ et $0<1+2u_k$.
u_{k+1} est le quotient de deux nombres strictement positifs,
donc $0<u_{k+1}$ et P_{k+1} est vraie.

— Conclusion :
P_0 est vraie et P_n est héréditaire, par le principe de récurrence
on a bien pour tout entier naturel *n*, $0<u_n$.

2. Comme pour tout entier naturel *n*,$0<u_n$, pour étudier les variations de la suite, on peut comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{u_n}=\frac{3}{1+2u_n}$$

Mais, $u_n<1\Leftrightarrow 2u_n<2\Leftrightarrow 1+2u_n<3\Leftrightarrow 1<\dfrac{3}{1+2u_n}\ car\ 1+2u_n>0$

ainsi la suite (u_n) est croissante.

3. a. $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}}=\dfrac{\dfrac{3}{1+2u_n}}{1-\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}=\dfrac{\dfrac{3}{1+2u_n}}{\dfrac{1+2u_n-3u_n}{1+2u_n}}=\dfrac{3u_n}{1-u_n}=3v_n$

(v_n) est donc une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0=1$

b. Pour tout entier naturel n $v_n=v_0q^n=3^n$

c . $v_n=\dfrac{u_n}{1-u_n}\Leftrightarrow(1-u_n)v_n=u_n\Leftrightarrow v_n=u_n+u_nv_n\Leftrightarrow u_n=\dfrac{v_n}{1+v_n}\Leftrightarrow u_n=\dfrac{3^n}{3^n+1}$

d. on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$ quand $q>1$ En étudiant le quotient, on arrive à une forme indéterminée.

$u_n=\dfrac{3^n}{3^n+1}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3^n}}=\dfrac{1}{1+(\dfrac{1}{3})^n}$ Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{1}{3})^n=0$ car $-1<\dfrac{1}{3}<1$

Par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+(\dfrac{1}{3})^n=1$, par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$

4.
$n \leftarrow 0$
$u \leftarrow 0{,}5$
tant que $u\leqslant 0{,}9$
  $n \leftarrow n+1$
  $u \leftarrow \dfrac{3u}{1+u}$
fin du tant que
afficher n