Semaine d'entraînement au Baccalauréat
Épreuve de Mathématiques
SERIE S

Durée 4 heures

Jeudi 13 Décembre 2018

NB : Chaque élève traitera quatre exercices : les exercices n° 1, 2, 3 et l'un des deux exercices n°4 en fonction de la spécialité qu'il a choisie.

L'exercice de spécialité doit être traité sur une feuille séparée.

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'élève est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

L'usage d'<u>une</u> calculatrice est autorisé, le mode examen n'est pas exigé.

Aucun document n'est autorisé.

N.B.: Ce sujet comporte 4 pages d'exercices.

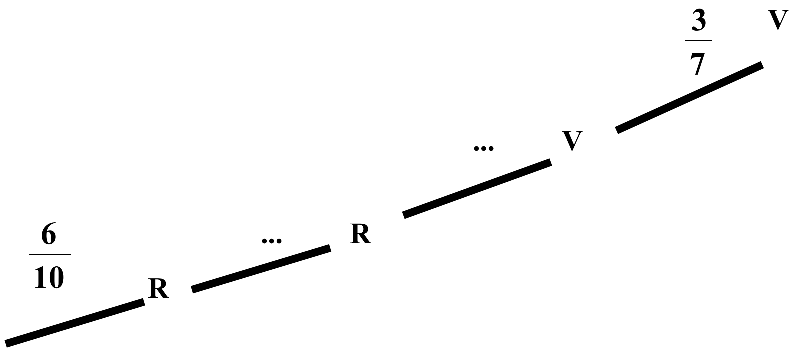
EXERCICE 1 : (4 points) *Pour tous les candidats*

Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules vertes indiscernables au toucher.

On extrait successivement et **sans remise** 4 boules de cette urne.

R désigne la sortie d'une boule rouge et **V** la sortie d'une verte.

1. a) Recopier, et compléter, par les pondérations, le chemin suivant :



En déduire que la probabilité de l'issue **RRVV** est égale à $\frac{1}{14}$.

b) Soit A l'événement caractérisé par : « On obtient deux boules rouges exactement et consécutives dans le tirage ». Quelles sont les autres issues réalisant l'événement A ?

c) En déduire que $P(A) = \frac{3}{14}$.

2. Calculer la probabilité de l'événement B caractérisé par : « On obtient deux boules rouges exactement et non consécutives ».

3. On note S l'événement : « Obtenir deux boules rouges exactement » .

Montrer que $P(S) = \frac{3}{7}$. On utilisera cette valeur pour la suite de l'exercice.

4. On répète 5 fois, de manière indépendante, le tirage ci-dessus.

a) Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux fois deux boules rouges. Donner le résultat obtenu arrondi au millième. Justifier la réponse.

b) Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois deux boules rouges. Donner le résultat obtenu arrondi au millième. Justifier.

5. Combien de fois faut-il répéter le tirage pour que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge soit strictement supérieure à 0,999 ?

EXERCICE 2 : **(5 points)** ***Pour tous les candidats***

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=\frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier *n*, $u_{n+1}=\frac{3u_n}{1+2u_n}$.

1. a) Calculer u_1 et u_2 .

b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel *n*, on a $0 < u_n$.

2. On admet que pour tout entier naturel *n*, $u_n < 1$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b) Que peut-on en déduire ?

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel *n* par $v_n=\frac{u_n}{1-u_n}$.

a) Monter que la suite (v_n) est une suite géométrique.

b) Exprimer pour tout entier naturel *n*, (v_n) en fonction de *n*.

c) En déduire que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n=\frac{3^n}{3^n+1}$.

d) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

4. Recopier et compléter les lignes de l'algorithme suivant afin qu'il affiche la plus petite valeur de *n* telle que $u_n > 0{,}9$.

```
n ← 0
u ← ...
tant que ...
    n ← ...
    u ← ...
fin du tant que
afficher n
```

<u>EXERCICE 3 :</u> (6 points) ***Pour tous les candidats***

Considérons les deux fonctions f et g définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^3\left(\mathrm{e}^{x+5}+\frac{1}{3}\right) \quad \text{et} \quad g(x)=\mathrm{e}^{x+5}(x+3)+1\ .$$

Partie A :

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2. On rappelle que $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x}=0$. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

3. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x.

4. Déduire le tableau de variations complet de g.

5. Montrer que l'équation $g(x)=0$ possède exactement deux solutions α et β .

6. On admet que $-6{,}15<\alpha<-6{,}14$. Vérifier que $-3{,}16<\beta<-3{,}15$.

7. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B :

1. Calculer $f'(x)$, puis vérifier que $f'(x)=x^2 g(x)$.

2. Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$, puis donner les variations de f (sans calculer les limites aux bornes).

3. Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^4}{3(\alpha+3)}$. Que peut-on dire de $f(\beta)$?

Partie C :

On considère la fonction h définie et dérivable sur $]-\infty\,;-3[$ par $h(x)=\dfrac{x^4}{3(x+3)}$.

1. Calculer $h'(x)$ pour $x\in\ ]-\infty\,;-3[$, étudier son signe, puis déterminer le sens de variations de h.

2. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$, puis de $f(\beta)$.

<u>EXERCICE 4 :</u> (5 points) ***Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité***

Indiquer pour chacune des cinq affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Affirmation 1 : L'ensemble des solutions de l'inéquation $e^{-2x+1} > \frac{1}{e^2}$ est S= $]-\infty; \frac{3}{2}[$.

2. Affirmation 2 : L'ensemble des solutions de l'inéquation $(e^x + e^2)(1-e^x) \geqslant 0$ est S=[-2 ; 0].

3. Soit (u_n) une suite arithmétique. On considère (v_n) la suite, définie pour tout entier naturel n par

$v_n = \exp(u_n)$. **Affirmation 3 :** (v_n) est une suite géométrique .

4. La suite (u_n) est une suite positive. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$ pour tout entier

naturel n. **Affirmation 4 :** Si (u_n) converge alors (v_n) converge.

5. Affirmation 5 : La courbe d'équation $y = x\sqrt{x(3-x)}$ admet une tangente horizontale au point de

coordonnées $(0;0)$.

<u>EXERCICE 4 :</u> (5 points) ***Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité***

Indiquer pour chacune des cinq affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Soit n un entier naturel. **Affirmation 1 :** 2 divise le nombre $3^{3n} - 1$.

2. x est un entier relatif. **Affirmation 2 :** Si x est solution de l'équation $5x^2 - 2x - 1 \equiv 0[6]$ alors $x \equiv 1[6]$.

3. Affirmation 3 : Le dernier chiffre de 2^{2018} est 4.

4. A et B sont deux matrices de taille 2.

Affirmation 4 : Si $A^2 = B^2 + I$ où I est la matrice unité, alors $A + B$ est inversible.

5. Soit (u_n) une suite d'entiers naturels non nuls telle que pour tout entier naturel n, u_n divise u_{n+1} .

Affirmation 5 : Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 | u_n$.