TS 12 **Devoir Surveillé n ° 8**

- Durée 2h - Calculatrices autorisées

Barème : 1) 10 pts 2) 10 pts	**Nom :**

BACCALAURÉAT
Loading... Please wait

Commentaires : Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées .
Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage …

Ex 1 :

L'annexe se rapporte à cet exercice.
Elle sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve. Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = e^{-x}\cos(4x)$$

et Γ sa courbe représentative tracée dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ de l'annexe. On considère également la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = e^{-x}$ et on nomme $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

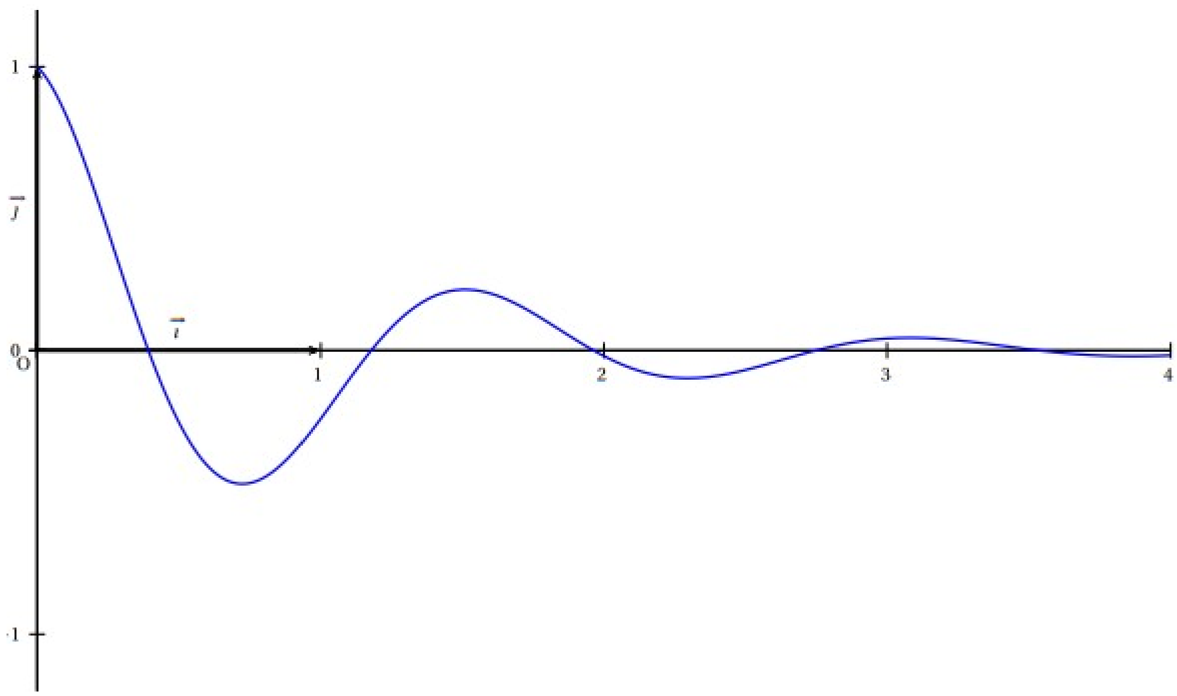
1. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$,

$$-e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}.$$

   b. En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et $\mathscr{C}$.
3. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.
   b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.
4. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$,

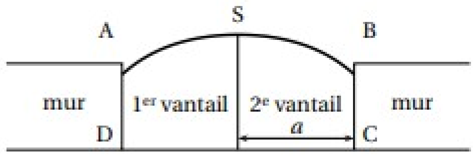
$$f'(x) = -e^{-x}\left[\cos(4x) + 4\sin(4x)\right].$$

   b. En déduire que les courbes Γ et $\mathscr{C}$ ont même tangente en chacun de leurs points communs.
5. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite $\mathscr{T}$ tangente à la courbe Γ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.
   Compléter le graphique donné en annexe, en y traçant $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}$.



Ex 2 : Un fabricant doit réaliser un portail en bois plein sur mesure pour un particulier. L'ouverture du mur d'enceinte (non encore construit) ne peut excéder 4 mètres de large. Le portail est constitué de deux vantaux de largeur a telle que $0 < a \leqslant 2$.

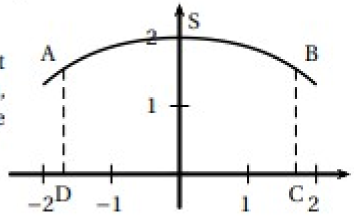
Dans le modèle choisi, le portail fermé a la forme illustrée par la figure ci-contre. Les côtés [AD] et [BC] sont perpendiculaires au seuil [CD] du portail. Entre les points A et B, le haut des vantaux a la forme d'une portion de courbe.



Cette portion de courbe est une partie de la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-2\,;\,2]$ par :

$$f(x) = -\frac{b}{8}\left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}\right) + \frac{9}{4} \quad \text{où } b > 0.$$

Le repère est choisi de façon que les points A, B, C et D aient pour coordonnées respectives $(-a\,;\,f(-a))$, $(a\,;\,f(a))$, $(a\,;\,0)$ et $(-a\,;\,0)$ et on note S le sommet de la courbe de f, comme illustré ci-contre.



Partie A

1. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[-2\,;\,2]$, $f(-x) = f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction f ?
2. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-2\,;\,2]$:

$$f'(x) = -\frac{1}{8}\left(e^{\frac{x}{b}} - e^{-\frac{x}{b}}\right).$$

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;\,2]$ et en déduire les coordonnées du point S en fonction de b.

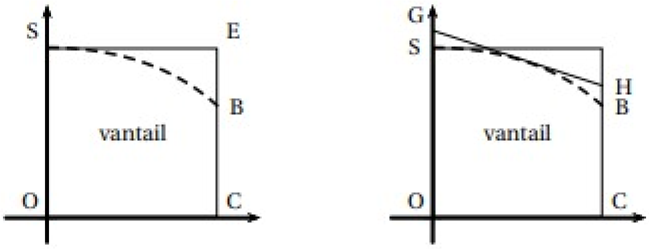
Partie B

La hauteur du mur est de 1,5 m. On souhaite que le point S soit à 2 m du sol. On cherche alors les valeurs de a et b.

1. Justifier que $b = 1$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 1{,}5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ et en déduire une valeur approchée de a au centième.
3. Dans cette question, on choisit $a = 1{,}8$ et $b = 1$. Le client décide d'automatiser son portail si la masse d'un vantail excède 60 kg. La densité des planches de bois utilisées pour la fabrication des vantaux est égale à 20 kg.m^{-2}. Que décide le client ?

Partie C

On conserve les valeurs $a = 1{,}8$ et $b = 1$.
Pour découper les vantaux, le fabricant prédécoupe des planches. Il a le choix entre deux formes de planches prédécoupées : soit un rectangle OCES, soit un trapèze OCHG comme dans les schémas ci-dessous. Dans la deuxième méthode, la droite (GH) est la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point F d'abscisse 1.



Forme 1 : découpe dans un rectangle   Forme 2 : découpe dans un trapèze

La forme 1 est la plus simple, mais visuellement la forme 2 semble plus économique.
Évaluer l'économie réalisée en termes de surface de bois en choisissant la forme 2 plutôt que la forme 1.

On rappelle la formule donnant l'aire d'un trapèze. En notant b et B respectivement les longueurs de la petite base et de la grande base du trapèze (côtés parallèles) et h la hauteur du trapèze :

$$\text{Aire} = \frac{b+B}{2} \times h.$$

Correction :

Ex 1 : https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_Polynesie_S_sept_2005.pdf ex 4

Ex 2 : https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_S_Am_Nord_2_juin_2017_AD_4-2.pdf ex 2