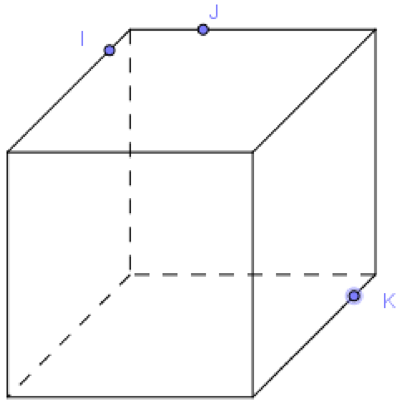
TS 12 **Devoir Surveillé n ° 6**

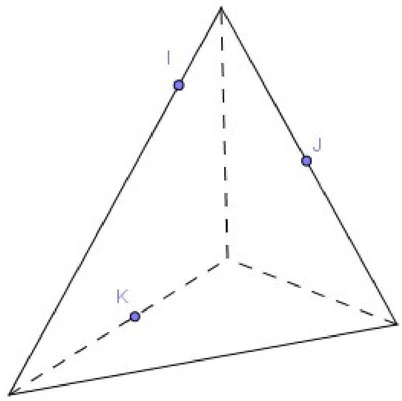
- Durée 2h - Calculatrices autorisées

Barème : 1) 4 pts 2) 4 pts 3) 12 pts	**Nom :**

Commentaires : Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées .
Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage …

Ex 1 : Déterminer les sections des solides ci-dessous par le plan (IJK)





Ex 2 : Soit $d:\begin{cases}x=1-5t\\y=-3+t\\z=4t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ et $d':\begin{cases}x=10t+9\\y=-2t+6\\z=-8t-8\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

1) Déterminer la position relative des droites d et d' .

2) En utilisant le point A(1,-3,0) de d , déterminer la distance entre d et d' .

Ex 3 : À tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=\dfrac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}$.

On désigne par C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Les courbes C_1 , C_2 et C_3 sont données en annexe.

Partie A : Étude de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x)=\dfrac{4e^x}{e^x+7}$

1) Vérifier que pour tout réel x , $f_1(x)=\dfrac{4}{1+7e^{-x}}$.

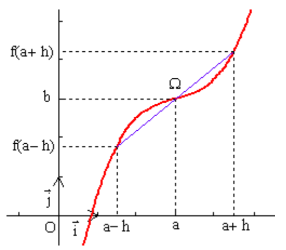
2) a)Démontrer que la courbe C_1 admet deux asymptotes dont on précisera des équations.
b) Démontrer que la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
c) Démontrer que pour tout réel x , $0<f_1(x)<4$.

Aide :

On doit prouver que

$\dfrac{f(a+h)+f(a-h)}{2}=b$

pour prouver que $\Omega(a;b)$ est centre de symétrie de la courbe (d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$)



3) a) Démontrer que le point I_1 de coordonnées (ln 7; 2) est un centre de symétrie de la courbe C_1 .
b) Déterminer une équation de la tangente T_1 à la courbe C_1 au point I_1 .
c) Tracer la droite T_1 .

4) a) Déterminer une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.
b) Calculer la valeur moyenne de f_1 sur l'intervalle [0;ln 7].

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n .

1) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul le point $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe C_n

2) a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul la courbe C_n et la droite d'équation $y=2$ ont un unique point d'intersection dont on précisera l' abscisse. On note I_n ce point d'intersection.

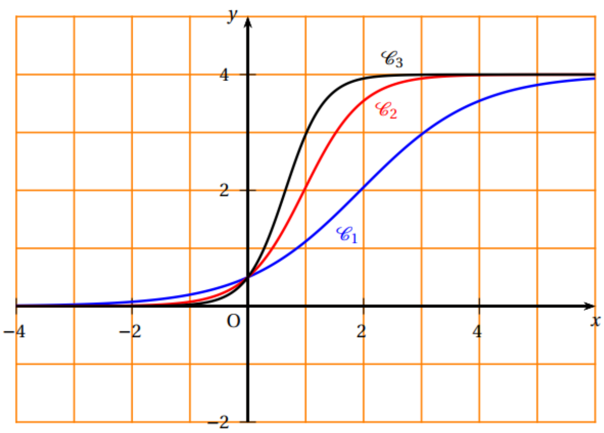
b) Déterminer une équation de la tangente T_n à la courbe C_n au point I_n .

c) Tracer les droites T_2 et T_3 .

3) Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$u_n=\dfrac{n}{\ln 7}\displaystyle\int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)\,dx$

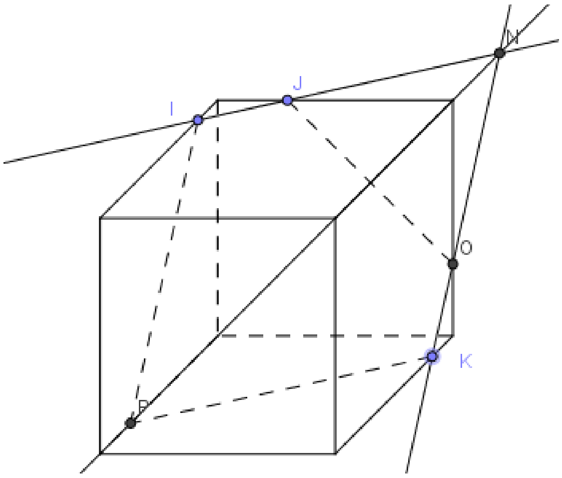
Montrer que la suite (u_n) est constante.

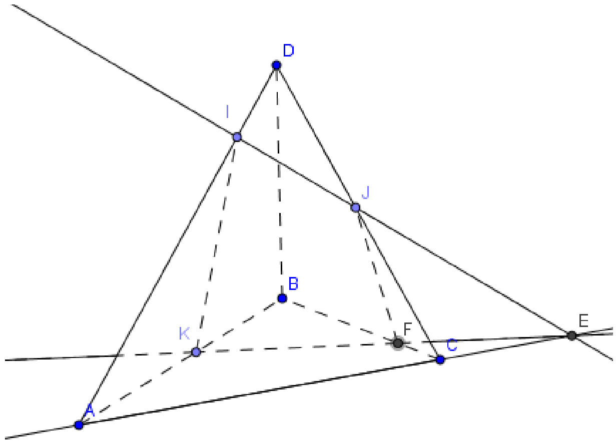


Correction :

Ex 1 :

Déterminer les sections des solides ci-dessous par le plan (IJK)





Ex 2 :

Soit $d:\begin{cases}x=1-5t\\y=-3+t\\z=4t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ et $d':\begin{cases}x=10t+9\\y=-2t+6\\z=-8t-8\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

1) Déterminer la position relative des droites d et d' .

$\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\1\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}10\\-2\\-8\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs respectifs de d et d' .

On a $\vec{u'}=-2\vec{u}$.

On en déduit que d et d' sont parallèles.

$A(1;-3;0)$ est un point de d .

Vérifions si A est un point de d' .

$-8t-8=0 \Leftrightarrow t=-1$

On a alors $-2\times(-1)+6=8 \neq -3$

On en déduit que A $\notin$ d'.

Ainsi d et d' sont strictement parallèles.

2) En utilisant le point A(1,-3,0) de d , déterminer la distance entre d et d' .

Soit $M(10t+9;-2t+6;-8t-8)$ un point de d .

On $AM^2=(10t+9-1)^2+(-2t+6+3)^2+(-8t-8)^2 = (10t+8)^2+(-2t+9)^2+(-8t-8)^2 = 100t^2+160t+64+4t^2-36t+81+64t^2+128t+64$

Ainsi $AM^2=168t^2+252t+209$

Il s'agit d'un trinôme du second degré dont on cherche le minimum.

Le minimum est atteint en $t=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{252}{336}=-\dfrac{3}{4}$

Pour $t=-\dfrac{3}{4}$, on obtient $AM^2=\dfrac{229}{2}$

La distance entre les deux droites est donc $\sqrt{\dfrac{229}{2}}$

Ex 3 :

https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_Amerique_Nord_S_2010_Baaj.pdf (exercice 4)