TS 6, 7, 12 - Durée 2 h - Une seule calculatrice autorisée	**Devoir Surveillé n°5** **SUJET A**	**Barème indicatif :** **1) 5 pts** **2) 8 pts** **3) 7 pts**

Commentaires :
Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées . Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage ...

NOM : **Prénom :** **Classe :**

Exercice 1 :

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiple). Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera SUR la copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Chaque réponse exacte rapporte un point. Chaque réponse fausse est pénalisée de 0.5 point.
Aucune justification n'est demandée.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soit z un nombre complexe de la forme x +iy, où x et y sont des réels.

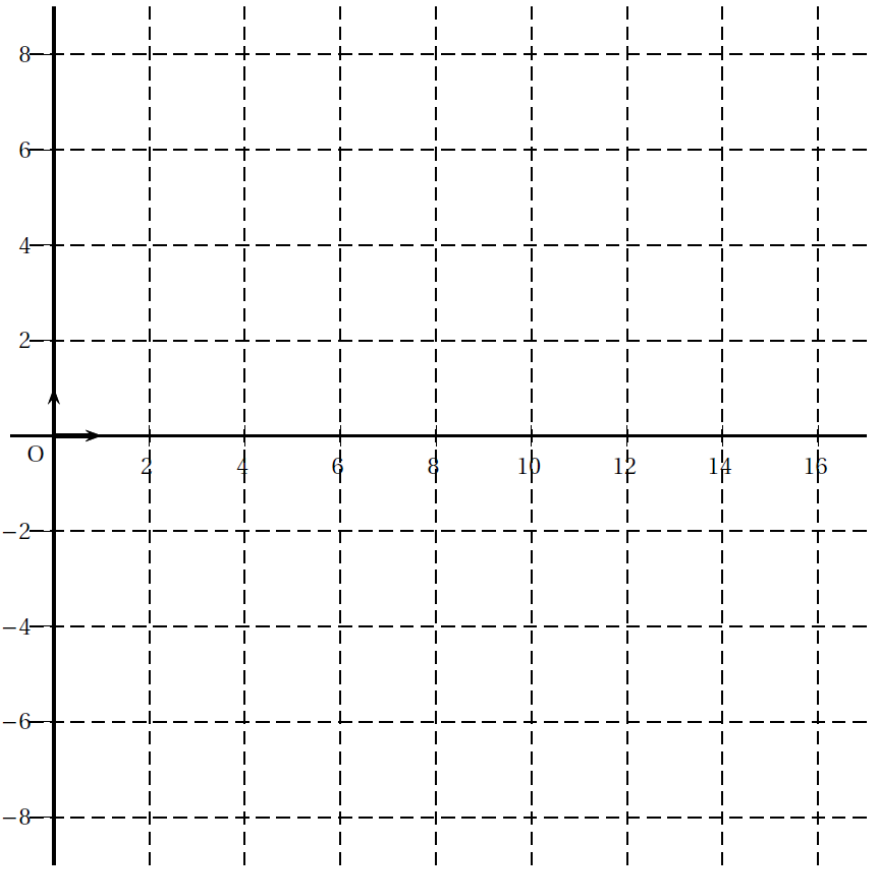
1. Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z-\overline{z}+2-4i=0$ admet :
   a) une unique solution   b) aucune solution
   c) une infinité de solutions   d) deux solutions
2. Soit z le nombre complexe d'affixe $(1+i)^4$. L'écriture exponentielle de z est :
   a) $\sqrt{2}e^{i\pi}$ b) $4e^{i\pi}$
   c) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ d) $4e^{i\frac{\pi}{4}}$
3. L'ensemble des points M du plan d'affixe $z=x+iy$ tels que $|z-1+i|=|\sqrt{3}-i|$ a pour équation :
   a) $(x-1)^2+(y+1)^2=2$ b) $(x+1)^2+(y-1)^2=2$
   c) $(x-1)^2+(y+1)^2=4$ d) $y=x+\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.
4. On considère la suite de nombres complexes (Z_n) définie pour tout entier naturel n par $Z_0=1+i$ et $Z_{n+1}=\frac{1+i}{2}Z_n$. On note M_n le point du plan d'affixe Z_n.
   a) Pour tout entier naturel n, le point M_n appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.
   b) Pour tout entier naturel n, le triangle OM_nM_{n+1} est équilatéral.
   c) La suite (U_n) définie par $U_n=|Z_n|$ est convergente.
   d) Pour tout entier naturel n, un argument de $\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_n}$ est $\frac{\pi}{2}$.
5. Soit A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives :
   $Z_A=-1-i$; $Z_B=2-2i$ et $Z_C=1+5i$. On pose $Z=\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}$.
   a) Z est un nombre réel.
   b) Le triangle ABC est isocèle en A.
   c) Le triangle ABC est rectangle en A.
   d) Le point M d'affixe Z appartient à la médiatrice du segment [BC].

Exercice 2 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère l'équation $(\mathrm{E}): z^2-2z\sqrt{3}+4=0$.

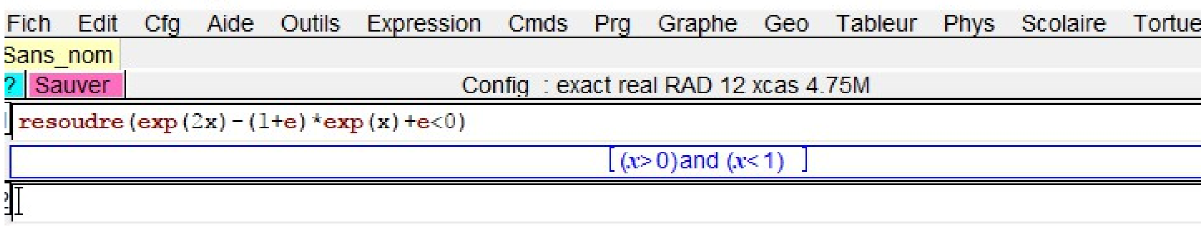
1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
2. On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n=2^n e^{i(-1)^n\frac{\pi}{6}}$ définie pour $n\geqslant 1$.
   a) Vérifier que z_1 est une solution de (E) .
   b) Ecrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.
   c) Placer les points M_1 , M_2 , M_3 et M_4 sur la figure donnée ci-dessous et tracer les segments $[\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2]$, $[\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3]$ et $[\mathrm{M}_3\mathrm{M}_4]$.
3. Montrer que, pour tout entier $n\geqslant 1$, $z_n=2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{(-1)^n}{2}i\right)$.
4. Calculer les longueurs $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$ et $\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3$.
5. Pour la suite de l'exercice, on admet que pour tout entier $n\geqslant 1$, $\mathrm{M}_n\mathrm{M}_{n+1}=2^n\sqrt{3}$.
   On note $l^n=\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2+\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3+\ldots+\mathrm{M}_n\mathrm{M}_{n+1}$.
   a) Montrer que, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $l^n=2\sqrt{3}(2^n-1)$.
   b) déterminer le plus petit entier n tel que $l^n\geqslant 1000$.



Exercice 3 :

N.B. : Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer, suivant les valeurs du réel a, le nombre de solutions de l'équation $\mathrm{e}^x=x+a$.
2. Avec un logiciel de calcul formel, on a résolu l'inéquation suivante : $\mathrm{e}^{2x}-(1+\mathrm{e})\mathrm{e}^x+\mathrm{e}<0$.



Justifier la réponse apportée par le logiciel.

TS 6, 7, 12 - Durée 2 h - Une seule calculatrice autorisée	**Devoir Surveillé n°5** **SUJET B**	**Barème indicatif :** **1) 5 pts** **2) 8 pts** **3) 7 pts**

Commentaires :
Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées . Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage ...

NOM : **Prénom :** **Classe :**

Exercice 1 :

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiple). Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera SUR la copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Chaque réponse exacte rapporte un point. Chaque réponse fausse est pénalisée de 0.5 point.
Aucune justification n'est demandée.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soit z un nombre complexe de la forme x +iy, où x et y sont des réels.

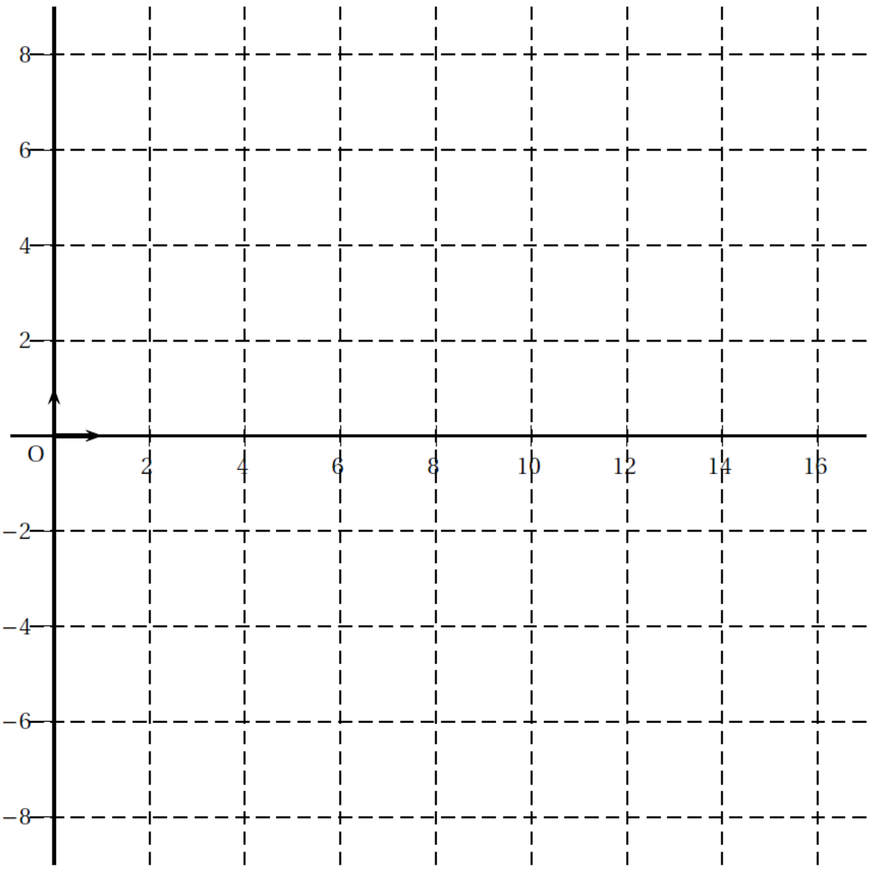
1. Soit z le nombre complexe d'affixe $(1+i)^4$. L'écriture exponentielle de z est :
   a) $4\mathrm{e}^{i\pi}$ **c)** $\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi}$
   b) $4\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$ d) $\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$
2. Soit A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives :
   $Z_A=-1-i$; $Z_B=2-2i$ et $Z_C=1+5i$. On pose $Z=\dfrac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}$.
   a) Le triangle ABC est rectangle en A.
   b) Z est un nombre réel.
   c) Le point M d'affixe Z appartient à la médiatrice du segment [BC].
   d) Le triangle ABC est isocèle en A.
3. L'ensemble des points M du plan d'affixe $z = x$ +iy tels que $|z-1+i| = |\sqrt{3}-i|$ a pour équation :
   a) $y=x+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ c) $(x+1)^2+(y-1)^2=2$
   b) $(x-1)^2+(y+1)^2=4$ d) $(x-1)^2+(y+1)^2=2$
4. Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z-\bar{z}+2-4i=0$ admet :
   a) une infinité de solutions c) deux solutions
   b) une unique solution d) aucune solution
5. On considère la suite de nombres complexes (Z_n) définie pour tout entier naturel n par
   $Z_0=$ 1+i et $Z_{n+1}=\dfrac{1+i}{2}Z_n$. On note M_n le point du plan d'affixe Z_n .
   a) La suite (U_n) définie par $U_n = |Z_n|$ est convergente.
   b) Pour tout entier naturel n, un argument de $\dfrac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_n}$ est $\dfrac{\pi}{2}$.
   c) Pour tout entier naturel n, le point M_n appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.
   d) Pour tout entier naturel n, le triangle OM_nM_{n+1} est équilatéral.

Exercice 2 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère l'équation $(\mathrm{E}) : z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$.

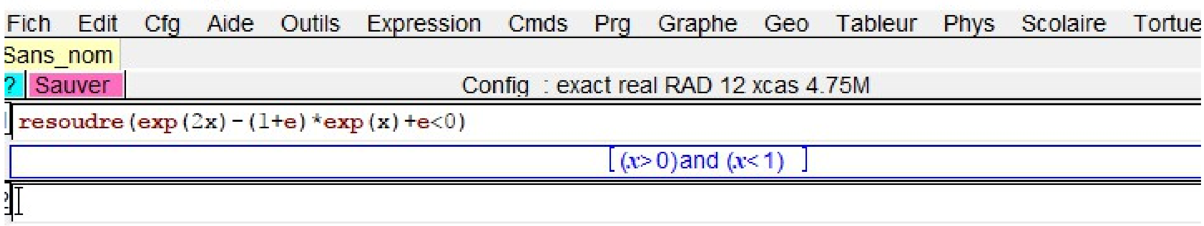
1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
2. On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}}$ définie pour $n \geqslant 1$.
   a) Vérifier que z_1 est une solution de (E) .
   b) Ecrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.
   c) Placer les points M_1 , M_2 , M_3 et M_4 sur la figure donnée ci-dessous et tracer les segments $[\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2]$, $[\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3]$ et $[\mathrm{M}_3\mathrm{M}_4]$.
3. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $z_n = 2^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{2} i \right)$.
4. Calculer les longueurs $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$ et $\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3$.
5. Pour la suite de l'exercice, on admet que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathrm{M}_n\mathrm{M}_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.
   On note $l^n = \mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 + \mathrm{M}_2\mathrm{M}_3 + \ldots + \mathrm{M}_n\mathrm{M}_{n+1}$.
   a) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $l^n = 2\sqrt{3}(2^n - 1)$.
   b) déterminer le plus petit entier n tel que $l^n \geqslant 1000$.



Exercice 3 :

N.B. : Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer, suivant les valeurs du réel a, le nombre de solutions de l'équation $\mathrm{e}^x = x + a$.
2. Avec un logiciel de calcul formel, on a résolu l'inéquation suivante : $\mathrm{e}^{2x} - (1+\mathrm{e})\mathrm{e}^x + \mathrm{e} < 0$.



Justifier la réponse apportée par le logiciel.