TS 6, 7, 12	Devoir Surveillé n°3	Barème indicatif :
- Durée 2 h - Une seule calculatrice autorisée		1) 4 pts 2) 8 pts 3) 8 pts

Commentaires :
Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées . Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage …

Exercice 1 : Restitution organisée des connaissances (sur 4 points)

1/ Démontrer que pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $(1+x)^n \geq 1+nx$.
2/ En déduire que pour tout nombre $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
3/ Utilisation : Déterminer si la suite (u_n) définie par $u_n = 3\times 2^n - 3^n$ est convergente.

Exercice 2 : (sur 8 points)

1/ On considère la fonction f_1 définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f_1(x) = 2x - 2 + \sqrt{x}$.
  a/ Déterminer la limite de la fonction f_1 en $+\infty$.
  b/ Étudier les variations de la fonction f_1 sur $]0\,;+\infty[$.

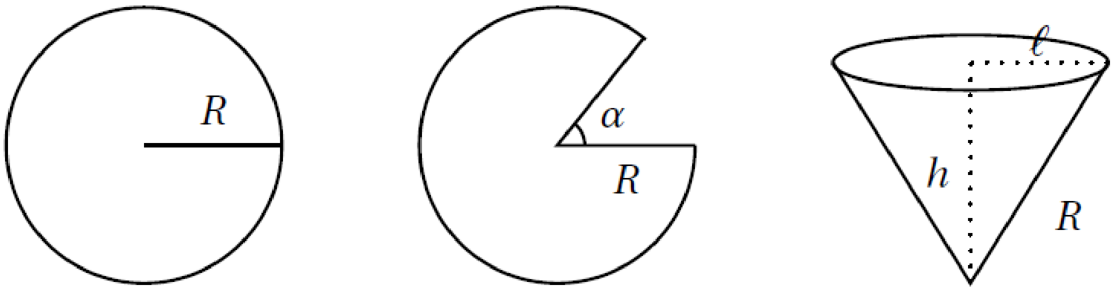
2/ Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n , définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f_n(x) = 2x - 2 + \dfrac{\sqrt{x}}{n}$.
  a/ Déterminer la limite de la fonction f_n en $+\infty$.
  b/ Étudier les variations de la fonction f_n sur $[0\,;+\infty[$.
  c/ Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $[0\,;+\infty[$.
  d/ Justifier que pour tout entier naturel non nul n : $0 < \alpha_n < 1$.

3/ a/ Exprimer $f_n(\alpha_{n+1})$ en fonction de α_{n+1} .
  b/ En déduire que pour tout entier naturel non nul n : $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$.

4/ Étude de la suite (α_n) :
  a/ Démontrer que la suite (α_n) est croissante.
  b/ En déduire qu'elle est convergente.
  c/ Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $\alpha_n = 1 - \dfrac{\sqrt{\alpha_n}}{2n}$.
  d/ En déduire la limite de la suite (α_n) .

<u>Exercice 3 :</u> (sur 8 points)

Dans un disque de carton de rayon *R*, on découpe un secteur angulaire correspondant à un angle de mesure α radians. On superpose les bords afin de créer un cône de révolution. On souhaite choisir l'angle α pour obtenir un cône de volume maximal.



On appelle *l* le rayon de la base circulaire de ce cône et *h* sa hauteur.
On rappelle que :

- le volume d'un cône de révolution de base un disque d'aire *A* et de hauteur *h* est $\frac{1}{3}A\times h$.
- la longueur d'un arc de cercle de rayon *r* et d'angle *θ*, exprimé en radians, est *rθ.*

On choisit *R* = 20 cm.

1/ Montrer que le volume du cône, en fonction de sa hauteur *h*, est : $\mathrm{V}(h)=\frac{1}{3}\pi(400-h^2)\times h$.

2/ Montrer qu'il existe une valeur de *h* qui rend le volume du cône maximal. Donner cette valeur.

3/ Calculer le rayon de la base du cône lorsque le volume est maximum.

4/ Comment découper le disque en carton pour avoir un volume maximum ? Donner un arrondi de α au degré près.

5/ ***<u>Bonus :</u>*** à ne résoudre qu'après avoir traité **<u>toutes</u>** les questions du sujet.
L'angle α dépend-il du rayon *R* du disque en carton ? Justifier la réponse.

DS3. TS. CORRIGE.

Exercice 1 : (4 points)

1/ première méthode : Démontrons par récurrence que pour tout n entier, $n \geqslant 1$ et pour tout réel x positif : $(1+x)^n \geqslant 1+nx$

Initialisation : pour le rang 1, $(1+x)^1=1+x$ et $1+1x=1+x$
donc pour tout réel x positif, $(1+x)^1 \geqslant 1+1x$ et l'inégalité est vraie au rang 1.
Hérédité : Supposons que l'égalité soit vraie pour un rang $p \geqslant 1$.
On a pour tout réel x positif, $(1+x)^p \geqslant 1+px$ et $(1+x)^{p+1}=(1+x)(1+x)^p$ avec $1+x>0$.
donc $(1+x)^{p+1} \geqslant (1+x)(1+px)$ c'est-à-dire $(1+x)^{p+1} \geqslant 1+x+px+px^2$.
Or $x^2 \geqslant 0$ et $p \geqslant 1$ donc $px^2 \geqslant 0$ et $(1+x)^{p+1} \geqslant 1+(1+p)x$.
L'inégalité est donc vraie au rang $p+1$, donc héréditaire.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a pour tout n entier, $n \geqslant 1$ et pour tout réel x positif : $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.

deuxième méthode : soit n un entier naturel non nul et soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=(1+x)^n-(1+nx)$.

- si $n=1$, $f(x)=1+x-1-x=0$ est la fonction nulle.
- si $n \geqslant 2$, f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $f'(x)=n(1+x)^{n-1}-n=n((1+x)^{n-1}-1)$
  $x \geqslant 0 \Rightarrow (1+x) \geqslant 1 \Rightarrow (1+x)^{n-1} \geqslant 1^{n-1}$ car la fonction $X \mapsto X^{n-1}$ est croissante sur $[1\,;+\infty[$, donc $(1+x)^{n-1}-1 \geqslant 0$ et $n>0$ d'où $f'(x) \geqslant 0$.
  La fonction f est donc croissante sur $[0\,;+\infty[$
  avec $f(0)=(1+0)^n-(1+n\times 0)=1^n-1=0$, donc pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$.

On a donc montré que quelque soit l'entier $n \geqslant 1$, pour tout $x \geqslant 0$, $(1+x)^n-(1+nx) \geqslant 0$.
On a donc, en particulier, pour tout $x>0$, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.

2/ Pour tout nombre $q>1$, on pose $x=q-1$ donc $x>0$ et on a $q^n=(1+x)^n$.
On a vu dans la question précédente que $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.
Or, si $x>0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} nx=+\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1+nx=+\infty$,
et d'après le théorème de minoration, $\lim\limits_{n \to +\infty} (1+x)^n=+\infty$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n=+\infty$.

3/ $u_n=3\times 2^n-3^n=2^n(3-\dfrac{3^n}{2^n})=2^n(3-(\dfrac{3}{2})^n)$.

Or $\dfrac{3}{2}=1{,}5>1$ et $2>1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n=\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n=+\infty$.

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(3-\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\right)=-\infty$, donc par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n=-\infty$.

Exercice 2 : (8 points)

1/ a/ Immédiat, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x)=+\infty$.

b/ f_1 est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, par somme de fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$.

Pour tout $x>0$, on a $f'_1(x)=2+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Pour tout $x>0$, $f'_1(x)>0$. Ainsi, f_1 est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2/ a/ Immédiat, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)=+\infty$.

b/ f_n est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, par somme de fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$.

Pour tout $x>0$, on a $f'_n(x)=2+\dfrac{1}{2n\sqrt{x}}$.

Pour tout $x>0$, $f'_n(x)>0$. Ainsi, f_n est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

c/ f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ par somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ et f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. De plus, $f(\mathbb{R}^+)=[-2\,;+\infty[$ et $0 \in f(\mathbb{R}^+)$.
Donc, d'après le théorème des bijections, l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution α_n dans $\mathbb{R}^+$.

d/ Pour tout entier naturel non nul n, on a : $f_n(0)=-2<0$ et $f_n(1)=\dfrac{1}{n}>0$.

$0 \in f_n(]0\,;1[)$, donc, d'après le théorème des bijections, l'unique solution α_n de l'équation est

telle que $0<\alpha_n<1$.

3/ a/ Pour tout entier naturel non nul n, on a :

$f_n(\alpha_{n+1})=2\alpha_{n+1}-2+\frac{\sqrt{\alpha_{n+1}}}{n}=2\alpha_{n+1}-2+\frac{\sqrt{\alpha_{n+1}}}{n+1}-\frac{\sqrt{\alpha_{n+1}}}{n+1}+\frac{\sqrt{\alpha_{n+1}}}{n}=0+\frac{\sqrt{\alpha_{n+1}}}{n}-\frac{\sqrt{\alpha_{n+1}}}{n+1}$

$f_n(\alpha_{n+1})=\sqrt{\alpha_{n+1}}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$. Donc $f_n(\alpha_{n+1})=\frac{\sqrt{\alpha_{n+1}}}{n(n+1)}$.

b/ On en déduit que pour tout entier naturel non nul n, $f_n(\alpha_{n+1})>0$.

4. a/ On a $f_n(\alpha_n)=0$ et $f_n(\alpha_{n+1})>0$ et donc $f_n(\alpha_n)<f_n(\alpha_{n+1})$.

Comme la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a forcément $\alpha_n<\alpha_{n+1}$.

On en déduit que la suite (α_n) est croissante.

b/ On a vu que pour tout entier naturel non nul n, $0<\alpha_n<1$.

Ainsi la suite (α_n) est croissante et majorée.

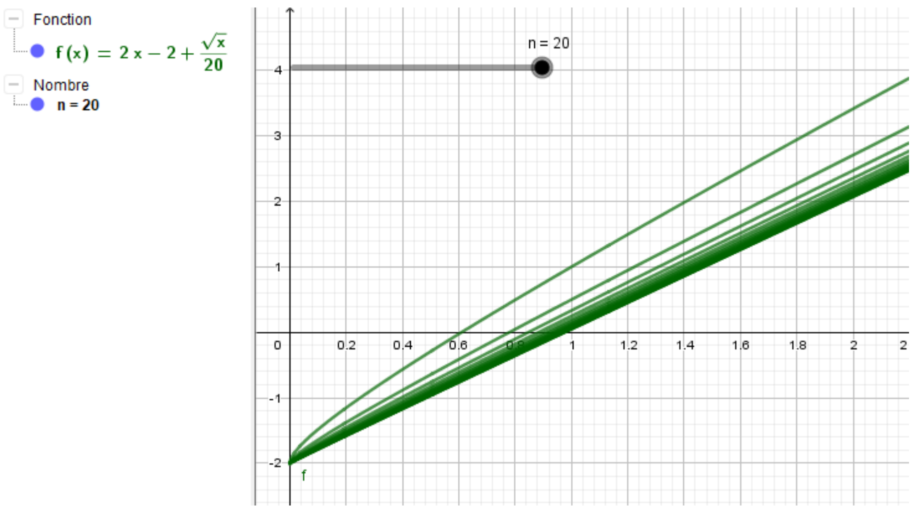
On en déduit qu'elle est convergente . On note α cette limite.

c/ Pour tout entier naturel non nul n, on a :

$f_n(\alpha_n)=0 \Leftrightarrow 0=2\alpha_n-2+\frac{\sqrt{\alpha_n}}{n} \Leftrightarrow \alpha_n=1-\frac{\sqrt{\alpha_n}}{2n}$

d/ On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=\alpha$ et par opérations sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{\sqrt{\alpha_n}}{2n}=1$.

Par unicité de la limite, on en déduit que $\alpha=1$.



Exercice 3 :

1/ D'après le théorème de Pythagore on a $l^2+h^2=R^2$ d'où $l^2=R^2-h^2=400-h^2$.

La base du cône est de rayon l donc son volume est $V=\frac{1}{3}\pi l^2 h$. On a donc bien $V(h)=\frac{1}{3}\pi(400-h^2)h$.

2/ De manière évidente on a $0<h<R$ donc ici $h\in]0\,;20[$. V : $V(h)=\frac{1}{3}\pi(400-h^2)h$ est un polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur]0 ; 20[et $\forall h\in]0\,;20[$, $V'(h)=\frac{\pi}{3}(-2h)\times h+\frac{\pi}{3}(400-h^2)\times 1=\frac{\pi}{3}(400-3h^2)=\frac{\pi}{3}(20-\sqrt{3}h)(20+\sqrt{3}h)$.

$V'(h)$ est du signe de $(20-\sqrt{3}h)$ sur]0 ; 20[car $\frac{\pi}{3}(20+\sqrt{3}h)>0$.

Les variations de V sont donc données par le tableau suivant :

h	0		$\frac{20\sqrt{3}}{3}$		20
$V'(h)$		$+$	0	$-$	
Variations de h		↗		↘	

V admet donc un maximum en $h=\frac{20\sqrt{3}}{3}$ ce maximum est $V\left(\frac{20\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{16000\pi\sqrt{3}}{27}\approx 3224{,}5$.

3/ Le volume est maximal si $h=\frac{20\sqrt{3}}{3}$, donc $h^2=\frac{400}{3}$, on en déduit $l^2=R^2-h^2=400-\frac{400}{3}=\frac{800}{3}$, donc $l=\sqrt{\frac{800}{3}}=\frac{20\sqrt{6}}{3}$.

4/ Or l représente le rayon de la base du cône. Le périmètre de cette base est : $2\pi l=\frac{40\pi\sqrt{6}}{3}$. Ce périmètre correspond à la longueur d'arc de cercle restant après le découpage du disque initial.

On a donc $2\pi R - R\alpha = \frac{40\pi\sqrt{6}}{3}$, soit $\alpha = 2\pi - \frac{2R\pi\sqrt{6}}{3R} = 2\pi - \frac{2\pi\sqrt{6}}{3} = \frac{2\pi}{3}(3-\sqrt{6})$ radians soit $\alpha \approx 66°$. Donc il faut découper un secteur angulaire d'angle environ égal à 66° pour obtenir le cône de volume maximal.

5/ D'après le théorème de Pythagore on a $l^2 + h^2 = R^2$ d'où $l^2 = R^2 - h^2$.

La base du cône est de rayon l donc son volume est $V = \frac{1}{3}\pi l^2 h$. On a donc bien $V(h) = \frac{1}{3}\pi(R^2 - h^2)h$.

De manière évidente on a $0 < h < R$ donc ici $h \in]0 ; R[$. V : $V(h) = \frac{1}{3}\pi(400 - h^2)h$ est un polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0 ; R[$ et $\forall h \in]0 ; R[$, $V'(h) = \frac{\pi}{3}(-2h)\times h + \frac{\pi}{3}(R^2 - h^2)\times 1 = \frac{\pi}{3}(R^2 - 3h^2) = \frac{\pi}{3}(R - \sqrt{3}h)(R + \sqrt{3}h)$.

$V'(h)$ est du signe de $(R - \sqrt{3}h)$ sur $]0 ; R[$ car $\frac{\pi}{3}(R + \sqrt{3}h) > 0$.

Les variations de V sont donc données par le tableau suivant :

h	0		$\frac{R\sqrt{3}}{3}$		20
$V'(h)$		+	0	−	
Variations de h		↗		↘	

V admet donc un maximum en $h = \frac{R\sqrt{3}}{3}$, donc $h^2 = \frac{R^2}{3}$. On en déduit $l^2 = R^2 - h^2 = R^2 - \frac{R^2}{2} = \frac{2R^2}{3}$, donc $l = R\sqrt{\frac{2}{3R^2} - h^2} = \frac{R\sqrt{6}}{3}$.

Or l représente le rayon de la base du cône. Le périmètre de cette base est donc $2\pi l = \frac{2\pi R\sqrt{6}}{3}$. Ce périmètre correspond à la longueur d'arc de cercle restant après le découpage du disque initial.

On a donc $2\pi R - R\alpha = \frac{2\pi R\sqrt{6}}{3}$, soit $\alpha = 2\pi - \frac{2R\pi\sqrt{6}}{3R} = 2\pi - \frac{2\pi\sqrt{6}}{3} = \frac{2\pi}{3}(3-\sqrt{6})$ radians soit $\alpha \approx 66°$. Donc la valeur de α ne dépend pas de R pour obtenir le volume maximal.