T S 6, 7, 12	Devoir surveillé n°2	16/10/17

NOM : **Prénom :** **Classe :**

Exercice 1 : (sur 4,5 points)

Soit f la fonction définie sur [–10;10] par $f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+6x-1$.

1. a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de x.
b) Exprimer $f''(x)$ en fonction de x, f'' étant la fonction dérivée de f' .
c) Étudier le signe de f'', en déduire le tableau de variation complet de f' .

2. a) Démontrer que l'équation $f'(x)=0$ admet une unique solution dans [–10;10].
b) Donner un encadrement à 0,001 près de cette solution.

3. a) Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.
b) En déduire le tableau de variations de f.

Exercice 2 : (sur 8,5 points)

Soit la suite numérique (u_n) définie par :

$u_0=2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$.

1. a. Donner les valeurs de u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , u_9 et u_{10} à 10^{-2} près.
b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2. a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n\leqslant n+3$.
b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$.
c. En déduire une validation de la conjecture précédente.

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=u_n-n$.
a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
b. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n=2\left(\frac{2}{3}\right)^n+n$.
c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k=u_0+u_1+\ldots+u_n$ et $T_n=\frac{S_n}{n^2}$.
a. Exprimer S_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (S_n) .
b. Déterminer la limite de la suite (T_n) .
c. On donne l'algorithme suivant :

```
Variables :
        N est un entier naturel
        U , S et A sont des nombres réels
Traitement :
        Entrer A
        U prend la valeur 2
        S prend la valeur U
        N prend la valeur 0
        Tant que S< A
                U prend la valeur 2/3 U + 1/3 N + 1
                S prend la valeur S+ U
                N prend la valeur N+ 1
        Fin Tant que
Sortie :
        Afficher N
```

(i) A quoi la sortie de cet algorithme correspond-elle ?

(ii) Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

(iii) On exécute cet algorithme en saisissant A = 10. Compléter le tableau donné ci-dessous au cours de l'exécution de l'algorithme.

A	U	S	N	Test S<A
10	2	2		

(iv) Modifier cet algorithme pour qu'il affiche aussi les valeurs de S_N et de T_N correspondantes.

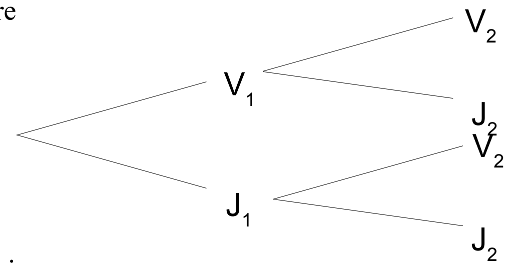
<u>Exercice 3 :</u> (sur 7 points)

Une association organise une loterie constituée de deux épreuves successives pour laquelle une participation m exprimée en Dirhams est demandée.
Pour la première épreuve, un joueur doit tirer successivement et sans remise au hasard, deux boules dans une urne contenant 2 boules vertes et 3 boules jaunes. Si le joueur obtient deux boules de couleurs différentes, il a perdu. Si le joueur obtient deux boules jaunes, il est remboursé de sa participation m.
Si le joueur obtient 2 boules vertes, il peut continuer le jeu et commencer la deuxième épreuve qui consiste à faire tourner une roue où sont inscrits des gains répartis comme suit :

- sur $\frac{1}{8}$ de la roue le gain est de 100 Dhs,
- sur $\frac{1}{4}$ de la roue le gain est de 20 Dhs,
- sur le reste le joueur est remboursé de sa participation m.

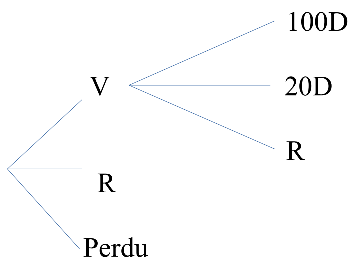
On appelle V_i l'événement « le joueur a obtenu une boule verte au ième tirage ». ($i \in \{1;2\}$)
On appelle J_i l'événement « le joueur a obtenu une boule jaune au ième tirage ». ($i \in \{1;2\}$)
On appelle V l'événement « le joueur a obtenu 2 boules vertes ».
On appelle J l'événement « le joueur a obtenu 2 boules jaunes ».

1. a) Compléter l'arbre ci-contre correspondant à la première épreuve.



b) Montrer que : $P(V)=\frac{1}{10}$ et $P(J)=\frac{3}{10}$.

c) On appelle 100D l'événement : « le joueur a gagné 100 Dhs »
On appelle 20D l'événement : « le joueur a gagné 20 Dhs ».
On appelle R l'événement : « le joueur est remboursé de sa participation et ne gagne rien ».
Compléter l'arbre ci-contre et en déduire les probabilités des événements 100D, 20D et R.

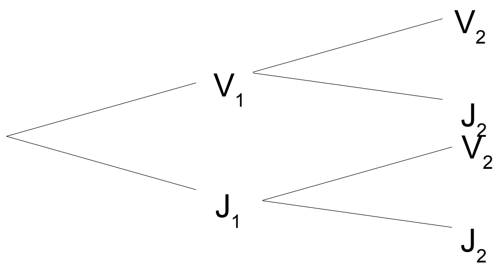


d) On considère un joueur qui à été remboursé de sa mise. Quelle est la probabilité qu'il ait tourné la roue ?

2. On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur c'est-à-dire la différence entre les sommes éventuellement perçues et la participation initiale m.
a) Donner X(Ω), l'ensemble des valeurs prises en fonction de *m* par la variable aléatoire X.
b) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
c) Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $E(X)=\frac{140-51m}{80}$
d) Quelle valeur faut-il donner à m pour que le jeu soit équitable ?
e) L'organisateur ne souhaite pas que le jeu soit équitable, et veut fixer la participation m à une valeur entière en Dirhams. Quelle valeur minimale faut-il donner à m pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent ?

3. Un joueur se présente et décide de jouer 5 fois, quelque soit les résultats obtenus.
On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de fois où le joueur gagne. (le joueur gagne si son gain algébrique est strictement positif)
a) Justifier que Y suit une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=\frac{3}{80}$.
b) Quelle est la probabilité que le joueur perde toutes les parties ?
c) Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins 2 fois ?
d) Donner l'espérance de Y et interpréter le résultat.

4. BONUS : On voudrait qu'un joueur ait plus d'une chance sur deux d'être remboursé de sa mise ou de gagner quand il joue une seule fois. On note G cet événement. Pour cela on garde deux boules vertes dans l'urne mais on modifie le nombre de boules jaunes. On appelle n le nombre de boules jaunes, on suppose $n > 1$. Calculer la valeur minimale de n pour que la condition précédente soit vérifiée. Pour cela, on pourra compléter l'arbre suivant :



Correction

Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur [–10;10] par $f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+6x-1$.

1. a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de x :

f est une fonction polynôme, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=2x^3-6x+6$

b) Exprimer $f''(x)$ en fonction de x, f'' étant la fonction dérivée de f'

f' est une fonction polynôme, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f''(x)=6x^2-6=6(x-1)(x+1)$

c) Étudier le signe de f'' , en déduire le tableau de variation complet de f'

x	–10		–1		1		10
$x-1$		–	⋮	–	0	+	
$x+1$		–	0	+	⋮	+	
$f''(x)$		+	0	–	0	+	

x	–10		–1		1		10
$f''(x)$		+	0	–	0	+	
f'	–1934	↗	10	↘	2	↗	1946

2. a) Démontrer que l'équation $f'(x)=0$ admet une unique solution dans [–10;10].

Sur $[-10;-1]$ f' est continue et strictement monotone d'intervalle image contenant 0.

D'après le théorème des bijections, l'équation $f'(x)=0$ admet donc une unique solution sur cet intervalle.

Sur [-1;10] f' est minorée par 2 et donc strictement positive. $f'(x)=0$ n'a donc pas de solution sur cet intervalle.

En conclusion, l'équation $f'(x)=0$ admet une unique solution α sur $[-10;10]$

b) Donner un encadrement à 0,001 près pour près de cette solution.

$-2,104\leqslant\alpha\leqslant-2,103$

3. a) Dresser le tableau de signes de $f'(x)$. **b)** En déduire le tableau de variations de f

x	–10		α		10
$f'(x)$		–	0	+	
f	4639	↘	$f(\alpha)$	↗	4759

$f(\alpha)\approx-17,1$

Exercice 2 :

1. a. On calcule les premiers termes, par exemple en utilisant le mode récurrence de la calculatrice, et on obtient : $u_1\approx2,33$, $u_2\approx2,89$, $u_3\approx3,59$, $u_4\approx4,39$, $u_9\approx9,05$ et $u_1\approx10,03$

b. On peut donc émettre la conjecture que la suite est croissante.

On pourra en tout cas affirmer qu'elle n'est pas décroissante.

2. a. Nous allons procéder par récurrence :

Identification de la propriété : Pour tout entier naturel *n*, posons la propriété P_n suivante : $u_n\leqslant n+3$.

Initialisation : Puisque l'on a $u_0=2$ et $0+3\geqslant2$, on vérifie bien : $u_0\leqslant0+3$, la propriété P_0 est bien vraie.

Hérédité : Pour k entier naturel fixé, on suppose la propriété P_k vraie.

On a $u_{k+1}=\frac{2}{3}u_k+\frac{1}{3}k+1$. Par hypothèse de récurrence : $u_k\leqslant k+3$.

En multipliant par un nombre positif : $\frac{2}{3}u_k\leqslant\frac{2}{3}k+\frac{2}{3}\times3$, soit $\frac{2}{3}u_k\leqslant\frac{2}{3}k+2$, puis, en ajoutant un même nombre dans chaque membre : $\frac{2}{3}u_k+\frac{1}{3}k+1\leqslant\frac{2}{3}k+2+\frac{1}{3}k+1$, ce qui donne : $u_{k+1}\leqslant k+3\leqslant(k+1)+3$. On a donc la propriété P_{k+1} est vraie.

Nous avons donc démontré le caractère héréditaire de la véracité des propriétés P_n .

Conclusion : Puisque la propriété P_0 est vraie et que nous avons prouvé l'hérédité, on peut en déduire, par le principe de récurrence que pour tout entier naturel *n*, on a P_n vraie, c'est-à-dire que pour tout entier naturel *n*, on a bien $u_n\leqslant n+3$.

b. $u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-u_n=-\frac{1}{3}u_n+\frac{1}{3}n+\frac{3}{3}=\frac{1}{3}(3+n-u_n)\geqslant0$ pour tout entier naturel *n* d'après le résultat précédent.

On a donc démontré que la suite (u_n) est bien croissante.

3. a. Exprimons, pour un entier *n* naturel quelconque, v_{n+1} en fonction de v_n :

$v_{n+1}=u_{n+1}-(n+1)=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-n-1=\frac{2}{3}u_n-\frac{2}{3}n=\frac{2}{3}(u_n-n)=\frac{2}{3}v_n$.

La relation de récurrence obtenue confirme que la suite (v_n) est bien géométrique de raison $q=\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0=u_0-0=2-0=2$.

b. On peut donc en déduire une expression explicite du terme général de la suite v : $v_n=2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Enfin, puisque l'on a, pour tout n, $v_n=u_n-n$, on en déduit : $u_n=v_n+n$, et donc on aboutit bien à l'expression demandée : $u_n=2\left(\frac{2}{3}\right)^n+n$.

c. Puisque la raison q est strictement comprise entre –1 et 1, on en déduit que la limite de la suite v est 0, et donc par limite d'une somme de suites, la limite de la suite u est donc $+\infty$, et la suite u est donc divergente.

4. a. S_n est la somme de $n+1$ termes de la suite u_n . Mais, comme par ailleurs, on peut considérer que chaque terme u_n est la somme de v_n et de n, donc en réordonnant les termes, S_n est la somme de deux « sous-sommes » : celle des $n+1$ premiers termes de la suite (v_n) et celle des $n+1$ premiers entiers naturels.

La première sous-somme est une somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique, et vaut donc : $v_0\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}=2\times3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)=6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$.

La seconde sous-somme est la somme des $n+1$ premiers entiers naturels, c'est-à-dire la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1, donc elle vaut : $\frac{n(n+1)}{2}$.

Finalement, on a $S_n=\frac{n(n+1)}{2}+6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$.

b. On en déduit : $T_n=\frac{n(n+1)}{2n^2}+\frac{6}{n^2}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$.

Puisque, une fois encore, $-1<q<1$, on a : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=0$. De plus, $\lim_{n\to+\infty}\frac{6}{n^2}=0$. Donc par limite d'une somme de suites, puis d'un produit de suites : $\lim_{n\to+\infty}\frac{6}{n^2}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)=0$.

De plus $\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{n^2+n}{2n^2}=\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2n^2}=\frac{1+\frac{1}{n}}{2}$. Or $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}$ =0, donc par somme $\lim_{n\to+\infty}1+\frac{1}{n}=1$, donc par quotient, $\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$. Par somme, $\lim_{n\to+\infty}T_n=\frac{1}{2}$. La suite (T_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

c. (i) La sortie de l'algorithme correspond au rang N à partir duquel $S_N\geqslant A$, où A est un nombre réel fixé par l'utilisateur de l'algorithme.

(ii) Comme $\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty$, on est sûr que pour tout réel A, il existe un rang N à partir duquel $S_N\geqslant A$.

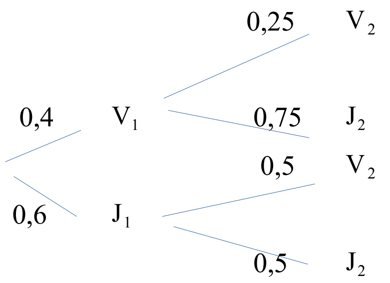
A	U	S	N	Test S<A
10	2	2	0	vrai
10	2,33	4,33	1	vrai
10	2,89	7,22	2	vrai
10	4,39	11,61	3	faux

(iv)

Variables :
N est un entier naturel
U , S et A sont des nombres réels
Traitement :
Entrer A
U prend la valeur 2
S prend la valeur U
N prend la valeur 0
Tant que $S<A$
U prend la valeur $\frac{2}{3}U+\frac{1}{3}N+1$
S prend la valeur $S+U$
N prend la valeur $N+1$
Fin Tant que
Sortie :
Afficher N, Afficher S
Afficher S/N^2

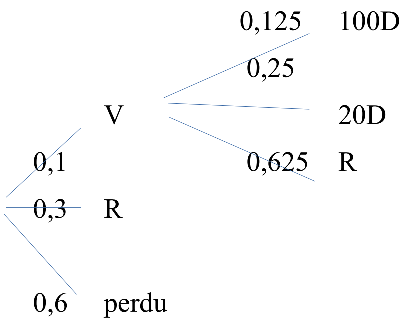
Exercice 3 :

1. a)



b) $P(V)=P(V_1 \cap V_2)$ = 0,4×0,25 = 0,1 et $P(J)=P(J_1 \cap J_2)$ =0,6×0,5 = 0,3

c)



$P(100\,D)=P(V \cap 100\,D)=P(V)\times P_V(100\,D)=\frac{1}{80}$ et P(20D) = ...= $\frac{1}{40}$.

$P(R)=\frac{3}{10}+0,1\times\frac{5}{8}=\frac{29}{80}$

d) $P_R(V)=\frac{P(V \cap R)}{P(R)}\approx 0,17$

2. a) X(Ω) = {− m ;0;20− m ;100− m }.

b) $p(X=-m)=\frac{6}{10}$, $p(X=0)=\frac{29}{80}$, $p(X=20-m)=\frac{1}{40}$ et $p(X=100-m)=\frac{1}{80}$

c) E(X)

$$-m\times p(X=-m)+0\times p(X=0)+(20-m)\times p(X=20-m)+(100-m)\times p(X=100-m)=\frac{140-51\,m}{80}$$

d) On cherche m tel que E(X)=0, c'est-à-dire :

$140-51\ m=0 \Leftrightarrow m=\frac{140}{51}$

e) On cherche m tel , que E(X) < 0. En effet X désignant le gain du joueur, il faut que son gain moyen (son espérance) soit négative.On trouve alors la solution en résolvant l'inéquation :

$140-51\ m<0 \Leftrightarrow m\geqslant\frac{140}{51}$

On trouve donc m ≥ 3.

3. a) On reconnaît un schéma de Bernoulli consistant en la répétition 5 fois de manière indépendante de l'épreuve de Bernoulli de succès de probabilité $\frac{3}{80}$.

Y est la variable qui compte le nombre de succès obtenus.

Donc Y suit la loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=\frac{3}{80}$

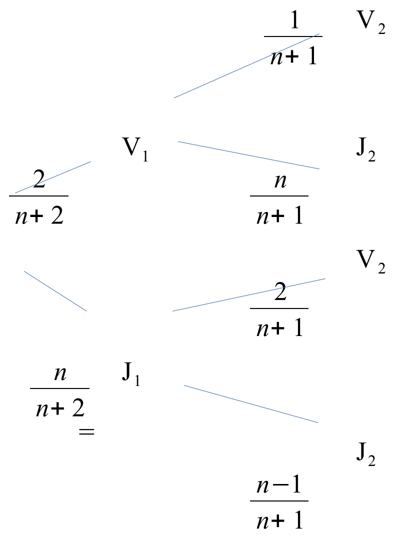
b) p(Y=0) ≈ 0,826

d) P(Y>=2) ≈ 0,013

e) Pour une loi binomiale le calcul de l'espérance est direct : $E(Y)=n\times p=\frac{5\times 3}{80}=\frac{15}{80}\approx 0.1875$

On répétant 80 fois cette expérience, il peut espérer gagner 15 fois.

4. L'arbre devient alors :



$P(V)=\frac{2}{n+2}\times\frac{1}{n+1}=\frac{2}{(n+2)(n+1)}$

$$P(J)=\frac{n}{n+2}\times\frac{n-1}{n+1}=\frac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)}$$

$$P(G)=P(V)+P(J)=\frac{n^2-n+2}{(n+2)(n+1)}$$

On veut $P(G)\geqslant\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad 2(n^2-n+2)\geqslant n^2+3n+2 \quad\Leftrightarrow\quad n^2-5n+2\geqslant 0$

$\Delta=25-8=17$

$x_1=\frac{5-\sqrt{17}}{2} \approx 0{,}44$ et $x_2=\frac{5+\sqrt{17}}{2} \approx 4{,}56$

Le trinôme est du signe de $a=1$ sauf entre les racines . Il faut donc prendre $n\geqslant 5$