TS 7, 12 - Durée 2 h - Une seule calculatrice autorisée	**Devoir Surveillé n°1**	**Barème indicatif :** **1)** 4 **pts** **2) 8 pts** **3) 8 pts**	**Nom :** **Prénom :** **Classe :**

Commentaires :
Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées . Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage …

Exercice 1 Vrai ou faux (4 points)

Indiquer pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse. Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1/ La suite (u_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{5^{n+1}}{8^n}$.

Affirmation : la suite (u_n) est géométrique de premier terme 5.

2/ Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \frac{2}{n}$.

Affirmation : la suite (v_n) est majorée par 2.

3/ Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par: $v_{n+1} = \sqrt{1+v_n^2}$ et $v_0 = 1$.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n^2$.

Affirmation : la suite (w_n) est arithmétique.

4/ Soit la suite (S_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4}$.

Affirmation : la suite (S_n) est une suite croissante.

Exercice 2 (8 points)

f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}$.

On se propose d'étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et vérifiant pour tout nombre entier naturel *n*, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ propriétés de la fonction *f* :

a/ Étudier le sens de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

b/ Résoudre dans l'intervalle $[0;+\infty[$ l'équation $f(x) = x$. On note α la solution.

c/ Montrer que si $x \in [0;\alpha]$ alors $f(x) \in [0;\alpha]$.

2/ Étude de la suite (u_n) :

Dans cette question, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel *n*, par $u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}$.

a/ Sur le graphique donné en annexe, sont représentées la courbe représentative de *f* et la droite d'équation $y = x$.
Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0;0)$, et, en utilisant ces courbes, construire à partir de A_0 les points A_1 ; A_2 et A_3 d'ordonnées nulle et d'abscisses respectives, u_1 , u_2 et u_3 .
Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n) ?

b/ Démontrer que pour tout entier naturel *n*, $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$.

c/ En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3 (8 points)

On considère deux suites (u_n) et (v_n) .

La suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel par $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$.

La suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = 2^n$.

Partie A : Conjectures

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16

1/ Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites?

2/ Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats suivants :

12	10	3 080	1 024
13	11	6 153	2 048
14	12	12 298	4 096
15	13	24 587	8 192

Conjecturer les limites des suites (u_n) et (v_n) .

Partie B : Étude de la suite (u_n) .

1/ Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = 3\times 2^n + n - 2$.

2/ Déterminer la limite de la suite.

3/ Déterminer à l'aide de la calculatrice le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.

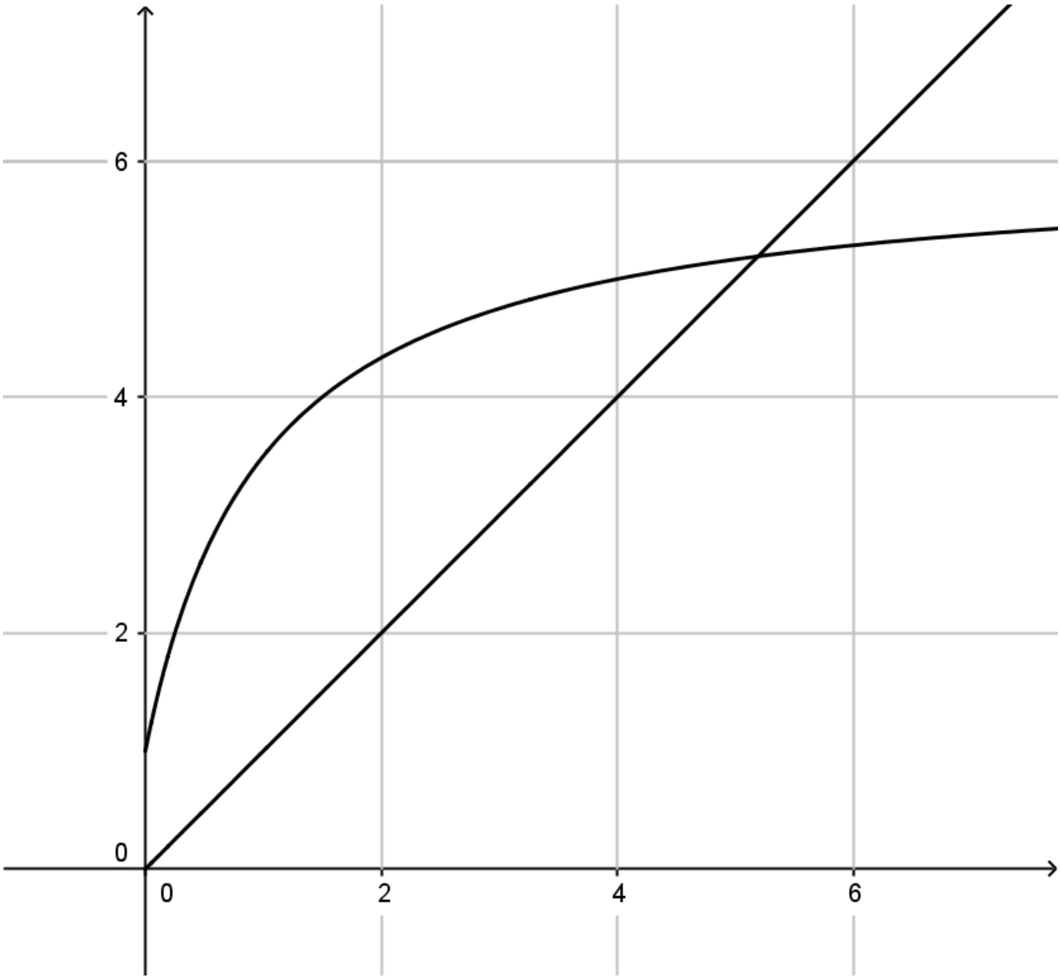
Partie C : Étude de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

1/ On pose : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ montrer que $w_{n+1} - w_n = \frac{-n+3}{2^{n+1}}$ et en déduire que (w_n) est monotone à partir d'un certain rang que l'on précisera.

2/ On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$. Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

NOM : **Classe :**

Annexe à compléter et à rendre avec la copie



Exercice 1 Vrai ou faux (4 points)

1°) La suite (u_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{5^{n+1}}{8^n}$.

$u_n = \frac{5^{n+1}}{8^n} = 5 \times \frac{5^n}{8^n} = 5 \times \left(\frac{5}{8}\right)^n$ u_n est de la forme $u_0 \times q^n$ avec $u_0=5$ et $q = \frac{5}{8}$.

La suite (u_n) est donc géométrique de premier terme 5, **Affirmation vraie** .

2°) Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \frac{2}{n}$

$n \geqslant 1$

$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n} \leqslant 1$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \frac{2}{n} \leqslant 2$

$\Leftrightarrow v_n \leqslant 2$ la suite (v_n) est majorée par 2. **Affirmation vraie**

3°) Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par: $v_{n+1} = \sqrt{1+v_n^2}$ et $v_0 = 1$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n^2$.

Calcul de $w_{n+1} - w_n = v_{n+1}^2 - v_n^2 = \left(\sqrt{1+v_n^2}\right)^2 - v_n^2 = 1 + v_n^2 - v_n^2 = 1$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 1$ la suite est arithmétique de raison 1.

Affirmation vraie.

4°) Sens de variation de la suite (S_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4}$.

$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4} = \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + ... + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{(n+1)^4}\right) - \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + ... + \frac{1}{n^4}\right) = \frac{1}{(n+1)^4}$ et $\frac{1}{(n+1)^4} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite (S_n) est croissante. **Affirmation vraie**.

Exercice 2 (8 points)

f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}$.

On se propose d'étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et vérifiant pour tout nombre entier naturel *n*, $u_{n+1} = f(u_n)$

1/ propriétés de la fonction *f* :

a/ Étudier le sens de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

f est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a : $f'(x) = \frac{5}{(x+1)^2} > 0$

On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

b/ Résoudre dans l'intervalle $[0;+\infty[$ l'équation $f(x) = x$. On note α la solution.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a :

$f(x) = x \Leftrightarrow 6 - \frac{5}{x+1} = x \Leftrightarrow 6(x+1) - 5 = x(x+1) \Leftrightarrow 6x + 6 - 5 = x^2 + x \Leftrightarrow x^2 - 5x - 1 = 0$

$\Delta = 29$ Il y a donc deux racines distinctes : $x_1 = \frac{5-\sqrt{29}}{2}$ et $x_2 = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$

$x_1 < 0$ et $x_2 > 0$. On en déduit que l'unique solution est $\alpha = x_2$.

c/ Montrer que si $x \in [0;\alpha]$ alors $f(x) \in [0;\alpha]$.

f est strictement croissante sur $[0;\alpha]$, donc :

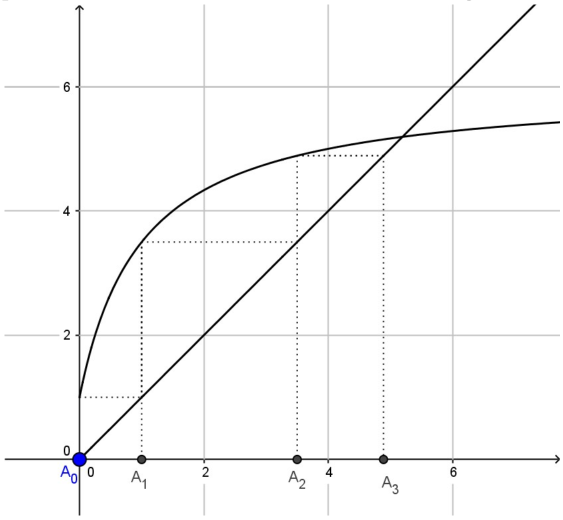
$0 \leq x \leq \alpha \Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(\alpha)$

Or $f(0) = 1$ et f(α)= α On en déduit que $1 \leqslant f(x) < \alpha$ et donc $0 \leqslant f(x) \leqslant \alpha$

2/ Étude de la suite (u_n) :

Dans cette question, la suite (u_n) est définie par $u_0=0$ et pour tout entier naturel *n*, par $u_{n+1}=f(u_n)=6-\dfrac{5}{u_n+1}$

a/ Sur le graphique ci-contre, sont représentées la courbe représentative de *f* et la droite d'équation $y=x$.
Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0;0)$, et, en utilisant ces courbes, construire à partir de A_0 les points A_1 ; A_2 ; A_3 et A_4 d'ordonnées nulle et d'abscisses respectives, u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .
Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n) ?



Conjectures : Il semble que (u_n) est une suite croissante et convergente

b/ Démontrer que pour tout entier naturel *n*, $0\leq u_n\leq u_{n+1}\leq\alpha$.

Soit $P(n)$: « $0\leq u_n\leq u_{n+1}\leq\alpha$ » pour $n\in\mathbb{N}$

Initialisation :
$u_0=0$ et $u=1$. On a bien $0\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant\alpha$. Donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité :
On suppose que $P(n)$ est vraie pour un entier naturel n fixé , càd $0\leq u_n\leq u_{n+1}\leq\alpha$. (HR)
Montrons que $P(n+1)$ est vraie , c'est-à-dire $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant\alpha$.
D'après l'hypothèse de récurrence (HR) , on a :
$0\leq u_n\leq u_{n+1}\leq\alpha$
Or on a vu que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et si $x\in[0;\alpha]$ alors $f(x)\in[0;\alpha]$.
On en déduit que :
$0\leqslant f(0)\leqslant f(u_n)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(\alpha)\leqslant\alpha \quad\Rightarrow\quad 0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant\alpha$
Ainsi $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion :
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq u_n\leq u_{n+1}\leq\alpha$

c/ En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

De la question précédente, on déduit que (u_n) est croissante . De plus elle est majorée par α , donc elle est convergente.
On note L sa limite . On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=L$

Or $u_{n+1}=f(u_n)=6-\dfrac{5}{u_n+1}$.

Donc par opérations sur les limites, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=f(L)$

Par unicité de la limite on donc $f(L)=L$ et on en déduit que $L=\alpha$.

Exercice 3

correction : http://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_AD_S_Pondichery_26_avril_2017_ecran.pdf