Exercice 2
Partie A) 1)

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 2 = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x\left(1 - x + \frac{2}{\mathrm{e}^x}\right)$$

On a $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} 1 - x = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^x} = 0$

Donc par somme et produit, on obtient $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x\left(1 - x + \frac{2}{\mathrm{e}^x}\right) = -\infty$

2) g est dérivable sur $]-\infty;0]$ (indiqué dans l'énoncé)
(Sinon, en TS, il suffit de dire par somme et composée de fonctions dérivables)
$\forall x \leq 0$, $g'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = -x\mathrm{e}^{-x}$
Pour tout $x \leq 0$, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $-x \geq 0$, donc $g'(x) \geq 0$
g' ne s'annule qu'en 0, donc g est strictement croissante.

3)

x	$-\infty$	α	0
g	$-\infty$	0	3

4) g est dérivable (donc continue) et strictement croissante sur $]-\infty;0]$.
On a $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $g(0) = 3$
Comme $0 \in]-\infty;0]$, d'après le théorème des bijections (ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires), on peut dire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-\infty;0]$.

5) $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 0 = \mathrm{e}^{-\alpha} + \alpha\mathrm{e}^{-\alpha} + 2 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\alpha}(1+\alpha) = -2 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\alpha} = -\frac{2}{1+\alpha}$

6)

x	$-\infty$	α	0
g	$-\infty$	0	3
$g(x)$	-	0	+

Partie B) 1)
$g(-1,5) < 0$ et $g(-1,45) > 0$.
En appliquant le théorème des bijections sur $[-1,5;1,45]$, on obtient le résultat.

2) a)

a	b	c	Signe de $g(c)$	$b - \mathrm{a} > 10^{-2}$
-1,5	-1,45	-1,475	négatif	Oui 0,05
-1,475	-1,45	-1,4625	positif	Oui 0,025
-1,475	-1,4625	-1,46875	négatif	Oui 0,0125
-1,46875	-1,4625		négatif	Non 0,00625

B) -1,47< α <-1,46

Partie C :

1) h est dérivable sur $]-\infty;0]$ (indiqué dans l'énoncé)
(Sinon, en TS, il suffit de dire par composée et quotient de fonctions dérivables)
Pour tout $x\leq 0$, on a :

$$h'(x)=3\times\frac{1\times\left(e^{-x}+2\right)-x\left(-e^{-x}\right)}{\left(e^{-x}+2\right)^2}=3\frac{g(x)}{\left(e^{-x}+2\right)^2}$$

2)

x	$-\infty$		α		0
$h'(x)$		-	0	+	
h		↘	$h(\alpha)$	↗	

$$h(\alpha)=\frac{3\alpha}{e^{-\alpha}+2}=\frac{3\alpha}{-\frac{2}{1+\alpha}+2}=\frac{3\alpha}{\frac{-2+2(1+\alpha)}{1+\alpha}}=\frac{3}{2}(1+\alpha)$$

Partie D :

1) Pour $x\leq 0$, on a $A(x)=OP\times OQ=-xf(x)=-\frac{3x}{e^{-x}+2}=-h(x)$

2)

x	$-\infty$		α		0
A		↗	$A(\alpha)$	↘	

$$A(\alpha)=-h(\alpha)=-\frac{3}{2}(1+\alpha)\quad\approx\quad 0{,}69$$