Exercice 5 (*pour les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité*)

Partie A:

1. On a $A^3 = 8A^2 + 35A - 250I$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} A^3 = 8A^2 + 35A - 250I \quad & \Leftrightarrow -A^3 + 8A^2 + 35A = 250I \\ & \Leftrightarrow A\left(-A^2 + 8A + 35I\right) = 250I \\ & \Leftrightarrow A\left(-\frac{1}{250}A^2 + \frac{4}{125}A + \frac{7}{50}I\right) = I. \end{aligned}$$

Posons $B = -\frac{1}{250}A^2 + \frac{4}{125}A + \frac{7}{50}I$. On a trouvé une matrice B telle que $AB = BA = I$ donc A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{250}A^2 + \frac{4}{125}A + \frac{7}{50}I$.

2. À l'aide de la calculatrice, on trouve :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{25} & \frac{1}{50} & \frac{1}{50} \\ \frac{2}{25} & \frac{3}{50} & -\frac{7}{50} \\ \frac{24}{25} & -\frac{2}{25} & \frac{3}{25} \end{pmatrix} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -7 \\ 48 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Partie B

1. Les trois points R, S et T appartiennent au graphe de f si et seulement si leurs coordonnées sont de la forme $(x, f(x))$. On en déduit que le triplet (a, b, c) doit vérifier le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcr} a \times 1^2 + b \times 1 + c & = & 2 \\ a \times 6^2 + b \times 6 + c & = & -3 \\ a \times (-4)^2 + b \times (-4) + c & = & -3 \end{array}\right.$$

soit, après simplification :

$$\left\{\begin{array}{rcr} a + b + c & = & 2 \\ 36a + 6b + c & = & -3 \\ 16a - 4b + c & = & -3 \end{array}\right.$$

2. En posant $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, le produit matriciel AX vaut $\begin{pmatrix} a + b + c \\ 36a + 6b + c \\ 16a - 4b + c \end{pmatrix}$. Le système précédent est donc équivalent à $AX = B$ avec $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

3. On sait, d'après la partie A, que la matrice A est inversible, l'égalité $AX = B$ est donc équivalente à $X = A^{-1}B$. On effectue ce produit matriciel à la calculatrice et on obtient

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{9}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

La fonction f est donc définie par $f(x) = -\frac{x^2}{5} + \frac{2x}{5} + \frac{9}{5}$.

Partie C

1. On peut faire un tableau de congruences :

$k \mod 5$	0	1	2	3	4
$k^2 \mod 5$	0	1	-1	-1	1

Il est alors clair que l'on a l'équivalence souhaitée.

2. (a) Soit $M(x, y)$ un point de cette parabole. On a alors $y = -\frac{x^2}{5} + \frac{2x}{5} + \frac{9}{5}$, ce qui est équivalent à $-5y = x^2 - 2x - 9$. Cette égalité implique que $x^2 - 2x - 9$ est divisible par 5 donc $x^2 - 2x - 9 \equiv 0[5]$. Comme $-9 \equiv 1[5]$, on a bien $x^2 - 2x + 1 \equiv 0[5]$.
   (b) D'après la question précédente, on a $(x-1)^2 \equiv 0[5]$ ce qui est équivalent, d'après la première question, à $x - 1 \equiv 0[5]$. Ainsi, on a $x \equiv 1[5]$ donc, par définition de la congruence, il existe un entier m tel que $x = 1 + 5m$.
   On a $y = -\frac{x^2}{5} + \frac{2x}{5} + \frac{9}{5} = \frac{1}{5}\left(-(1+5m)^2 + 2(5m+1) + 9\right) = 10 - 25m^2 = -5m^2 + 2$.
   (c) On en déduit que les points de la parabole à coordonnées entières sont les points dont les coordonnées sont de la forme $\left(5m+1, -5m^2+2\right)$, avec $m \in \mathbb{Z}$.

Partie D:

3. (a) On fait un tableau de congruences avec le résultat du produit mn :

$m \mod 7$ \ $n \mod 7$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

   On voit donc que le produit n'est congru à 0 modulo 7 que si m ou n est modulo 7.

   On peut aussi raisonner par l'absurde: On suppose mn divisible par 7 et ni m ni n divisibles par 7. Il existe alors des entiers $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$ et (a, b) compris entre 1 et 6 tels que $m = a + 7k$ et $n = b + 7k'$. On a alors $mn = ab + 49kk'$ avec ab un entier compris entre 1 et 36. Or les seuls entiers sont 7, 14, 21 et 35 et aucun ne peut s'écrire comme un produit ab de deux entiers compris entre 1 et 6. On en déduit une contradiction donc soit m soit n est divisible par 7.

   Enfin, on peut utiliser l'indication de l'énoncé : On suppose que mn est divisible par 7, montrons que soit m soit n est divisible par 7. On suppose par l'absurde que ni m ni n ne sont divisibles par 7. D'après l'énoncé, cela signifie que le seul diviseur positif commun de m avec 7 est 1 et de même pour n. On en déduit que le produit n'a pas de diviseur positif commun avec 7 autre que 1 ce qui est une contradiction. On a montré, par l'absurde, que soit m soit n est divisible par 7.
   (b) On développe : $(x-2)(x-4) = x^2 - 6x + 8$. Or, $-6 \equiv 1[7]$ et $8 \equiv 1[7]$ d'où $(x-2)(x-4) \equiv x^2 + x + 1[7]$.
   (c) Soit $M(x, y)$ un point de la parabole à coefficients entiers. Alors $y = \frac{1}{7}(x^2+x+1)$ donc $7y = x^2+x+1$. On a donc $x^2+x+1 \equiv 0[7]$. Or, d'après la question précédente, on sait que $x^2+x+1 \equiv (x-2)(x-4)[7]$ donc $(x-2)(x-4) \equiv 0[7]$. Ainsi, $(x-2)(x-4)$ est divisible par 7, ce qui implique d'après la première question, que $(x-2)$ ou $(x-4)$ est divisible par 7. On sait donc qu'il existe un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2 + 7m$ ou $x = 4 + 7m$.
   - Si $x = 2 + 7m$, alors $y = \frac{1}{7}\left((2+7m)^2 + (2+7m) + 1\right) = 1 + 5m + 7m^2$.
   - Si $x = 4 + 7m$, alors $y = \frac{1}{7}\left((4+7m)^2 + (4+7m) + 1\right) = 3 + 9m + 7m^2$.

   On en déduit que les points de la parabole à coefficients entiers sont ceux dont les coordonnées sont de la forme $(2+7m, 1+5m+7m^2)$ ou $(4+7m, 3+9m+7m^2)$ avec $m \in \mathbb{Z}$.