Corrigé de l'exercice 4.

Partie A.

On a $f(x) = \dfrac{x^2+3}{2x}$. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et l'on a :

$$f'(x) = \frac{2x(2x) - 2(x^2+3)}{(2x)^2} = \ldots = \frac{2(x^2-3)}{(2x)^2} = \frac{2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(2x)^2}$$

Donc $\forall x \geq \sqrt{3}$ On a $2x > 0$ et $x + \sqrt{3} > 0$ donc $f'(x) \geq 0$

D'où le tableau de variation de f sur $[\sqrt{3} ; +\infty[$

x	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f(x)$	$\sqrt{3}$ ↗	

Partie B.

1. ***a.*** On a : $u_0 = 2$; $v_0 = \dfrac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_n = \dfrac{3}{v_n}$. Par calcul on obtient :

$u_1 = \dfrac{7}{4}$; $u_2 = \dfrac{97}{56}$; $u_3 = \dfrac{18817}{10864}$; $v_1 = \dfrac{12}{7}$; $v_2 = \dfrac{168}{97}$; $v_3 = \dfrac{32592}{18817}$

b. On a : $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} = \dfrac{u_n + \dfrac{3}{v_n}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{3}{u_n}\right) = \dfrac{(u_n)^2 + 3}{2\,u_n} = f(u_n)$

2. Soit $\mathcal{P}$ la propriété définie par : $\sqrt{3} < u_{n+1} < u_n$

i. <u>Initialisation</u> :

On a : $u_0 = 2$; $u_1 = \dfrac{7}{4}$ et $\sqrt{3} \approx 1,732$ Donc $\sqrt{3} < u_1 < u_0$

Donc $\mathcal{P}$ est vraie pour $n = 0$

ii. <u>Hérédité</u>:

Soit k un entier tel que $\sqrt{3} < u_{k+1} < u_k$ ***(H.R)*** .

Montrons qu'on a aussi : $\sqrt{3} < u_{k+2} < u_{n+1}$

<u>Démo</u> : D'après l' H.R on a : $\sqrt{3} < u_{k+1} < u_k$

Or, la fonction f est strictement croissante sur $[\sqrt{3} ; +\infty[$, on a alors

$f(\sqrt{3}) < f(u_{k+1}) < f(u_k) \Leftrightarrow \sqrt{3} < u_{k+2} < u_{k+1}$ d'où l'hérédité.

iii. <u>Conclusion</u> :

D'après le raisonnement par récurrence, on peut donc affirmer que $\forall n \geq 0$, $\sqrt{3} < u_{n+1} < u_n$

Donc la suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{3}$

3. $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $\sqrt{3} < u_{n+1} < u_n$ donc $\dfrac{1}{u_n} < \dfrac{1}{u_{n+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \dfrac{3}{u_n} < \dfrac{3}{u_{n+1}} < \dfrac{3}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow v_n < v_{n+1} < \sqrt{3}$

Ce qui signifie que la suite (v_n) est croissante et majorée par $\sqrt{3}$

4. $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $\sqrt{3} < u_{n+1} < u_n$ et $v_n < v_{n+1} < \sqrt{3}$

Donc $v_n < v_{n+1} < \sqrt{3} < u_{n+1} < u_n$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n < \sqrt{3} < u_n$

5. ***a.*** $\forall\ n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} - \sqrt{3} = \dfrac{(u_n)^2 + 3}{2\,u_n} - \sqrt{3}$

$$= \frac{1}{2u_n}\left((u_n)^2 + 3 - 2\sqrt{3}\,u_n\right) = \frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{3})^2$$

b. $\forall\ n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n > \sqrt{3}$ donc $2u_n > 2\sqrt{3}$ et $\dfrac{1}{2u_n} < \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

et comme $(u_n - \sqrt{3})^2 > 0$, on a alors : $\dfrac{(u_n - \sqrt{3})^2}{2u_n} < \dfrac{(u_n - \sqrt{3})^2}{2\sqrt{3}}$

et par conséquent on a : $u_{n+1} - \sqrt{3} < \dfrac{(u_n - \sqrt{3})^2}{2\sqrt{3}}\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}$

6. a. Soit $\mathfrak{R}$ la relation définie par : $0 < u_n - \sqrt{3} < \left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^n$

i. <u>Initialisation</u> :

On a : $u_0 = 2$, $\sqrt{3} \approx 1,732$ et $2 - \sqrt{3} \approx 0,27 < 1$

Donc $0 < u_0 - \sqrt{3} < \left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^0$ Donc $\mathcal{P}$ est vraie pour $n = 0$

ii. <u>Hérédité</u>:

Soit k un entier tel que $0 < u_k - \sqrt{3} < \left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^k$ ***(H.R)*** .

Montrons qu'on a aussi : $0 < u_{k+1} - \sqrt{3} < \left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^{k+1}$

<u>Démo</u> : D'après la propriété admise, on a : $0 < u_{k+1} - \sqrt{3} < \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(u_k - \sqrt{3})$

Or d'après ***(H.R)*** . on a $u_k - \sqrt{3} < \left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^k$ donc par transitivité,

$u_{k+1} - \sqrt{3} < \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^k \Leftrightarrow u_{k+1} - \sqrt{3} < \left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^{k+1}$ d'où l'hérédité.

iii. <u>Conclusion</u> :

D'après le raisonnement par récurrence, on peut donc affirmer que

$\forall\ n \in \mathbb{N}\ \ 0 < u_n - \sqrt{3} < \left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^n$

b. On sait que $-1 < \dfrac{1}{2\sqrt{3}} < 1$ donc $\lim_{+\infty} \left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^n = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes

On a **:** $\lim_{+\infty} u_n - \sqrt{3} = 0$ alors $\lim_{+\infty} u_n = \sqrt{3}$. Donc la suite (u_n) converge vers $\sqrt{3}$

On ad met que suite (v_n) est converge aussi vers $\sqrt{3}$

7. On sait que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $v_n < \sqrt{3} < u_n$ avec $\boldsymbol{\sqrt{3} \approx 1,732\,05081}$

Pour $n = 3$, on a : $v_3 < \sqrt{3} < u_3$ avec $v_3 = \dfrac{32592}{18817} \approx 1,732\,05081001$ et $u_3 = \dfrac{18817}{10864} \approx 1,732\,05080512$

On peu donc dire qu' à 10^{-7} on a : $\dfrac{32592}{18817} < \boldsymbol{\sqrt{3}} < \dfrac{18817}{10864}$