**Exercice 3 (correction)**

*f* est définie sur ℝ par $f(x)=x^2-2x-3$ et c est sa courbe représentative

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n$ est la droite d'équation $y=nx$

1/ Détermination des coordonnées des points d'intersection de c et $d_n$ en fonction de *n*.

Les abscisses de ces points sont solutions de l'équation $x^2-2x-3=nx$
soit $x^2-x(2+n)-3=0$

On a $\Delta=(2+n)^2+12>0$ , cette équation admet donc 2 solutions :
$x_1(n)=\dfrac{2+n-\sqrt{(2+n)^2+12}}{2}$ et $x_2(n)=\dfrac{2+n+\sqrt{(2+n)^2+12}}{2}$

2.a.
on a donc $u_n=\dfrac{2+n+\sqrt{(2+n)^2+12}}{2}$ et $v_n=f(x_1(n))=n\times x_1(n)$ soit $v_n=\dfrac{n\times(2+n-\sqrt{(2+n)^2+12})}{2}$

b.**Convergence de** $u_n$ : on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n+2=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (2+n)^2+12=+\infty$ par somme et produit
on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}=+\infty$ donc par composition $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{(2+n)^2+12}=+\infty$

donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

**Convergence de** $v_n$ : la limite en $+\infty$ de $v_n$ est indeterminée.

Transformons l'écriture de $v_n$ pour lever l'indétermination.

En multipliant l'expression de $v_n$ par la forme conjuguée de $2+n-\sqrt{(2+n)^2+12}$ au numérateur et au dénominateur, on obtient $v_n=\dfrac{-12n}{2(n+2+\sqrt{(n+2)^2+12})}$

et après simplification : $v_n=\dfrac{-12}{2\left(1+\dfrac{2}{n}+\sqrt{1+\dfrac{4}{n}+\dfrac{16}{n^2}}\right)}$

on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+\dfrac{4}{n}+\dfrac{16}{n^2}}=1$ par somme et composition et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{2}{n}=1$ par somme

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{2}{n}+\sqrt{1+\dfrac{4}{n}+\dfrac{16}{n^2}}=2$ par somme

Conclusion : par produit et quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\dfrac{-12}{4}=-3$