LYCÉE LYAUTEY

Décembre 2017

ENTRAINEMENT A L'EXAMEN DU BACCALAURÉAT

Épreuve de : MATHEMATIQUES

Série : S

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Ce sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6

Exercice 1 : (5 points)

Une usine fabrique des étuis en cuir pour téléphone mobile.
Chaque étui produit est soumis à deux contrôles :

Un contrôle de qualité de finition : l'étui ne doit pas présenter de défaut de finition.
Un contrôle de solidité : l'étui est exclu de la vente s'il n'est pas testé solide.

Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

- **94%** des étuis sont sans défaut de finition ; parmi les étuis qui sont sans défaut de finition, **96%** réussissent le test de solidité ;
- **2%** des étuis ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un étui parmi les étuis produits. On note :

F l'événement : « l'étui est sans défaut de finition »
S l'événement : « l'étui réussit le test de solidité »

1. ***a.*** En utilisant l'énoncé, préciser : $P(F)$; $P_F(S)$ et $P\left(\overline{F} \cap \overline{S}\right)$

b. Démontrer que $P_{\overline{F}}(\overline{S}) = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$.

c. Donner au complet l'arbre pondéré correspondant à cette situation.

2. ***a.*** Démontrer que $P(S) = \mathbf{0,9424}$.

b. Un étui a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition. (On donnera le résultat arrondi au dix-millième)

3. Les étuis ayant satisfait les deux contrôles rapportent un bénéfice de **50** Dh , ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité ne rapportent aucun dirham.
Les autres étuis rapportent un bénéfice de **30** Dh.

On désigne par B la variable aléatoire qui associe à chaque étui le bénéfice rapporté.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire B.

b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire B et interpréter le résultat.

4. On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de **20** étuis.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'étuis de ce lot ne réussissant pas le test de solidité.

On suppose que la quantité fabriquée est suffisamment importante pour que la constitution de ce lot puisse être assimilée à un tirage avec remise.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et préciser ses paramètres.

b. Calculer au millième près, la probabilité qu'au moins **2** étuis du lot ne passent pas le test de solidité.

c. Déterminer le plus grand nombre d'étuis par lot à former pour que la probabilité d'au moins **2** étuis du lot ne passent pas le test de solidité soit inférieure à **20%**.

Exercice 2 : (7 points)

Soit g la fonction définie et dérivable sur $]-\infty;0]$ par $g(x)=e^{-x}+xe^{-x}+2$.

Partie A

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$.

2. Calculer $g'(x)$, puis étudier son signe.

3. Donner le tableau de variations de g .

4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur $]-\infty;0]$.

5. Montrer que $e^{-\alpha}=-\dfrac{2}{1+\alpha}$.

6. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

1. Vérifier que $-1,5<\alpha<-1,45$.

2. On considère l'algorithme suivant :

> **Tant que** b - a > 10^{-2}
>
> $c\leftarrow\dfrac{a+b}{2}$
>
> **si** g(c) < 0 **alors** $a\leftarrow c$
>
> **sinon** $b\leftarrow c$
>
> **Fin tant que**

a. On prend pour valeurs initiales a = -1,5 et b = -1,45. **Recopier** et compléter le tableau ci-dessous :

a	***b***	***c***	**Signe de g(*c*)**	***b – a* >10^{-2}**
-1,5	-1,45	-1,475	négatif	oui
-1,475				

b. En déduire un encadrement de α à 10^{-2} près.

Partie C

Soit h la fonction définie et dérivable sur $]-\infty;0]$ telle que $h(x)=\dfrac{3x}{e^{-x}+2}$.

1. Pour tout réel $x\in]-\infty;0]$, Calculer $h'(x)$, puis démontrer que $h'(x)$ a le même signe que g (x).
(où g est la fonction définie dans la partie A)
.

2. En déduire les variations de la fonction h sur $]-\infty;0]$ et montrer qu'elle admet pour minimum $\dfrac{3}{2}(1+\alpha)$.

Partie D

On considère la fonction f définie sur $]-\infty;0]$ par $f(x)=\dfrac{3}{e^{-x}+2}$.

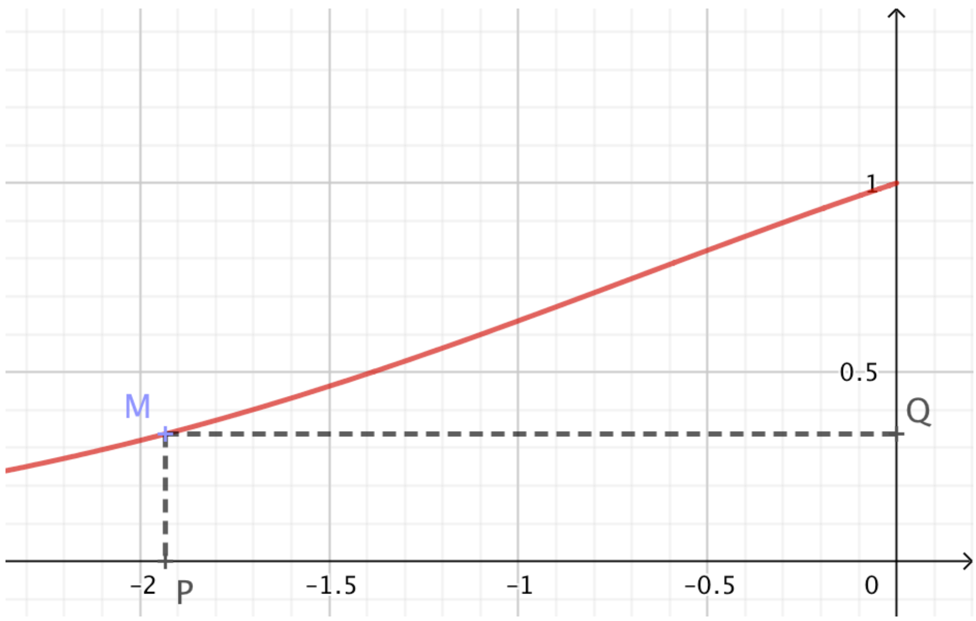
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. La figure est donnée ci-dessous.

Soit x un nombre négatif ou nul, abscisse du point M de la courbe (C).

On appelle : P le point de coordonnées $(x\ ;\ 0)$ et Q le point de coordonnées $(0\ ;\ f(x))$.

a. Calculer l'aire du rectangle OPMQ , notée $A(x)$, en fonction de $h(x)$.
(où h est la fonction définie dans la partie C)

b. Pour quelle valeur de x cette aire est maximale. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette aire.



Exercice 3 : (3 points)

On considère la fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = x^2 - 2x - 3$.
Soit n un entier naturel.

Dans un repère orthonormé, la droite (D_n) d'équation $y = nx$ coupe la courbe (C) de la fonction f en deux points A_n d'abscisse positive et B_n d'abscisse négative.

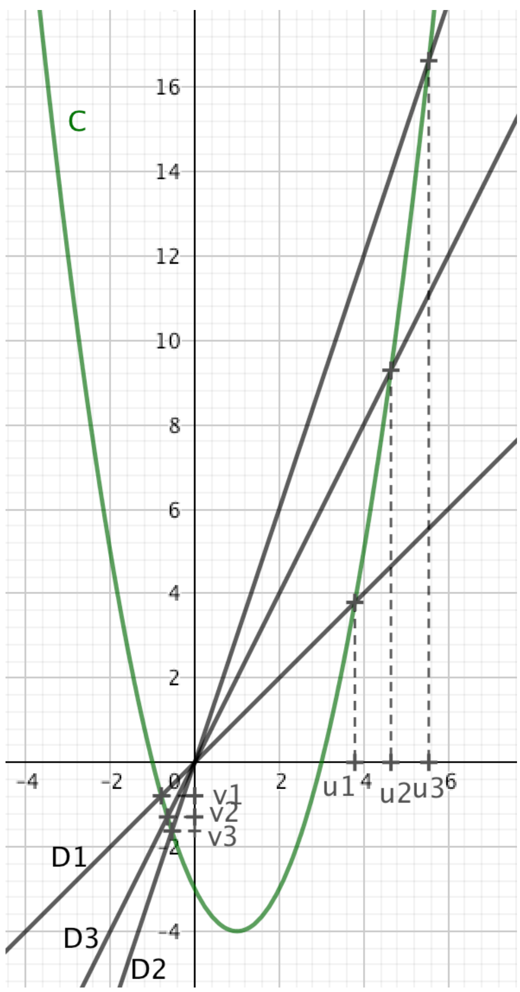
On a représenté ci-dessous la courbe (C) et les droites (D_1), (D_2) et (D_3).

1. Déterminer les coordonnées des deux points A_n et B_n en fonction de n.

2. On note u_n l'abscisse de A_n et v_n l'ordonnée de B_n.

a. Donner l'expression de u_n en fonction de n et vérifier que $v_n = \dfrac{n\left(n+2-\sqrt{(n+2)^2+12}\right)}{2}$.

b. Etudier la convergence des suites (u_n) et (v_n) ainsi définies.



Exercice 4 : (5 points)

L'objet de l'exercice, est de donner un encadrement (aussi précis que l'on souhaite) par deux nombres rationnels du nombre irrationnel $\sqrt{3}$.

Partie A

Montrer que la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2+3}{2x}$ est strictement croissante sur $\left[\sqrt{3};+\infty\right[$.

Partie B

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \;\; et \;\; v_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \;\; et \;\; v_{n+1} = \dfrac{3}{u_{n+1}}, \; pour \; tout \; n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

1. ***a.*** Calculer les valeurs exactes des premiers termes de chaque suite : u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 et v_3, puis donner une valeur approchée à 10^{-8} près de u_3 et v_3.

b. Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n, et vérifier que pour tout n de **N**, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie dans la partie A.

2. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt{3} < u_{n+1} < u_n$.
Que peut-on déduire quant à la convergence de la suite (u_n) ?

3. En déduire que la suite (v_n) est strictement croissante et majorée par $\sqrt{3}$. Est-elle convergente ?

4. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n < \sqrt{3} < u_n$

5. ***a.*** Montrer par calcul, pour tout n de **N**, $u_{n+1} - \sqrt{3} = \dfrac{1}{2u_n}\left(u_n - \sqrt{3}\right)^2$

b. En déduire par calcul, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} - \sqrt{3} < \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left(u_n - \sqrt{3}\right)^2$

On admet pour la suite l'encadrement : $0 < u_{n+1} - \sqrt{3} < \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left(u_n - \sqrt{3}\right)$, pour tout n de **N**.

6. ***a.*** Montrer par récurrence, pour tout n de **N** : $0 < u_n - \sqrt{3} < \left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^n$

b. En déduire que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{3}$. On admet que (v_n) converge aussi vers $\sqrt{3}$.

7. Donner deux nombres rationnels encadrant $\sqrt{3}$ avec 7 décimales exactes.

Exercice 4 : (5 points)

On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 36 & 6 & 1 \\ 16 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie A

On admet que la matrice A vérifie l'égalité : $A^3 = 8A^2 + 35A - 250I$.

1. En déduire que la matrice A est inversible et exprimer sa matrice inverse A^{-1} en fonction de A et de I.
2. A l'aide de la calculatrice, donner la matrice A^{-1}.

Les parties **B** et **C** bien que théoriquement liées, peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie B

Considérons les trois points $R(1 ; 2)$, $S(6 ; -3)$ et $T(-4 ; -3)$ et trois nombres rationnels a, b et c.

On souhaite déterminer une fonction polynôme du second degré f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, dont la courbe $(\mathcal{P})$ passe par les points R, S et T.

1. Déterminer le système de trois équations à trois inconnues dont le triplet $(a ; b ; c)$ est solution.
2. Justifier que ce système est équivalent à l'équation matricielle $AX = B$ où $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, A est la matrice définie ci-dessus et B une matrice colonne de dimension 3x1 à déterminer.
3. Résoudre alors ce système en utilisant le calcul matriciel, et donner l'expression de la fonction f.

Partie C

La notation $[\text{mod } n]$ signifie modulo n.

1. k désigne un entier relatif.
   Montrer que : $\left(k^2 \equiv 0 \;[\text{mod } 5]\right) \Leftrightarrow \left(k \equiv 0 \;[\text{mod } 5]\right)$
2. Considérons la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation $y = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{9}{5}$.
   On cherche à déterminer une condition caractérisant les points $M(x ; y)$ situés sur cette parabole avec, x et y des entiers relatifs.

   a. Montrer que si $M(x ; y)$ avec x et y entiers relatifs est un point de cette parabole, alors : $x^2 - 2x + 1 \equiv 0 \;[\text{mod } 5]$

   b. En déduire qu'il existe un entier relatif m tel que $x = 5m + 1$ et donner l'expression de y en fonction de m.

   c. En déduire l'ensemble des points à coordonnées entières situés sur la parabole $(\mathcal{P})$.

Partie D (un autre exemple de polynôme)

Nous pourrons admettre si besoin le résultat suivant :
Tout entier est soit multiple de 7, soit premier avec 7 (leur seul diviseur commun positif est 1)

a. *m* et *n* désignent deux entiers relatifs, montrer que :
si $\left(mn \equiv 0 \left[\text{mod } 7\right]\right)$, alors $\left(m \equiv 0 \left[\text{mod } 7\right] \textbf{ ou } n \equiv 0 \left[\text{mod } 7\right]\right)$

b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}$: $(x-2)(x-4) \equiv x^2+x+1 \left[\text{mod } 7\right]$

c. Déterminer alors, l'ensemble des points à coordonnées entières appartenant à la parabole $(\mathcal{P}')$ d'équation : $y = \dfrac{x^2}{7}+\dfrac{x}{7}+\dfrac{1}{7}$