TS 7 **Devoir Surveillé n ° 8**

- Durée 2 h
- Calculatrices autorisées

Barème :	**Nom :**
1) 10 pts 2) 10 pts	

Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées .Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage …

Correction : http://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_Amerique_Sud_S_21_nov_2016_FH-2.pdf

Ex 1 :

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données en annexe 1 sont les représentations graphiques, dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, de deux fonctions f et g définies sur $[0\,;\,+\infty[$.

On considère les points $A(0,5\,;\,1)$ et $B(0\,;\,-1)$ dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

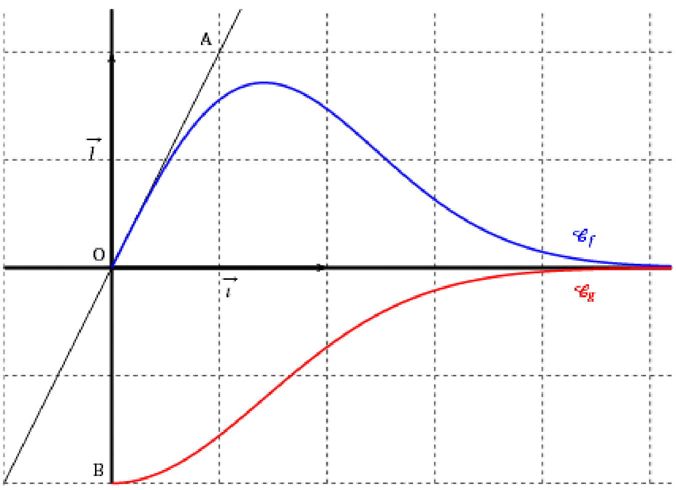
On sait que O appartient à $\mathscr{C}_f$ et que la droite (OA) est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point O.

1. On suppose que la fonction f s'écrit sous la forme $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x^2}$ où a et b sont des réels. Déterminer les valeurs exactes des réels a et b, en détaillant la démarche.

Désormais, on considère que $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$ pour tout x appartenant à $[0\,;\,+\infty[$

2. **a.** On admettra que, pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} \times \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$.
   Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   b. Dresser, en le justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.
3. La fonction g dont la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ passe par le point $B(0\,;\,-1)$ est une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.
   a. Déterminer l'expression de $g(x)$.
   b. Soit m un réel strictement positif.
   Calculer $I_m = \displaystyle\int_0^m f(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de m.
   c. Déterminer $\lim\limits_{m \to +\infty} I_m$.
4. **a.** Justifier que f est une fonction densité de probabilité sur $[0\,;\,+\infty[$.
   b. Soit X une variable aléatoire continue qui admet la fonction f comme densité de probabilité. Justifier que, pour tout réel x de $[0\,;\,+\infty[$,
   $P(X \leqslant x) = g(x) + 1$.
   c. En déduire la valeur exacte du réel α tel que $P(X \leqslant \alpha) = 0,5$.
   d. Sans utiliser une valeur approchée de α, construire dans le repère de l'annexe 1 le point de coordonnées $(\alpha\,;\,0)$ en laissant apparents les traits de construction.
   Hachurer ensuite la région du plan correspondant à $P(X \leqslant \alpha)$.

Annexe 1 (Exercice 1) :



Ex 2 :

Dans cet exercice, toutes les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-4}

On étudie un modèle de climatiseur d'automobile composé d'un module mécanique et d'un module électronique.
Si un module subit une panne, il est changé.

Partie A : Étude des pannes du module mécanique

Une enseigne d'entretien automobile a constaté, au moyen d'une étude statistique, que la durée de fonctionnement (en mois) du module mécanique peut être modélisée par une variable aléatoire D qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type σ :

1. Déterminer l'arrondi à 10^{-4} de σ sachant que le service statistique indique que $P(D \geqslant 48) = 0{,}7977$.

Pour la suite de cet exercice, on prendra $\sigma = 2{,}4$.

2. Déterminer la probabilité que la durée de fonctionnement du module mécanique soit comprise entre 45 et 52 mois.
3. Déterminer la probabilité que le module mécanique d'un climatiseur ayant fonctionné depuis 48 mois fonctionne encore au moins 6 mois.

Partie B : Étude des pannes d'origine électronique

Sur le même modèle de climatiseur, l'enseigne d'entretien automobile a constaté que la durée de fonctionnement (en mois) du module électronique peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Déterminer la valeur exacte de λ, sachant que le service statistique indique que $P(0 \leqslant T \leqslant 24) = 0,03$.

Pour la suite de cet exercice, on prendra $\lambda = 0{,}00127$.

2. Déterminer la probabilité que la durée de fonctionnement du module électronique soit comprise entre 24 et 48 mois.
3. **a.** Démontrer que, pour tous réels t et h positifs, on a :
   $P_{T \geqslant t}(T \geqslant t+h) = P(T \geqslant h)$, c'est-à-dire que la variable aléatoire T est sans vieillissement.

   b. Le module électronique du climatiseur fonctionne depuis 36 mois. Déterminer la probabilité qu'il fonctionne encore les 12 mois suivants.

Partie C : Pannes d'origine mécanique et électronique

On admet que les évènements $(D \geqslant 48)$ et $(T \geqslant 48)$ sont indépendants.
Déterminer la probabilité que le climatiseur ne subisse aucune panne avant 48 mois.

Partie D : Cas particulier d'un garage de l'enseigne

Un garage de l'enseigne a étudié les fiches d'entretien de 300 climatiseurs de plus de 4 ans. Il constate que 246 d'entre eux ont leur module mécanique en état de fonctionnement depuis 4 ans.
Ce bilan doit-il remettre en cause le résultat donné par le service statistique de l'enseigne, à savoir que $P(D \geqslant 48) = 0{,}7977$? Justifier la réponse.