TS 7 **Devoir Surveillé n ° 7**

- Durée 2 h
- Calculatrices autorisées

Barème : 1) 12 pts 2) 4 pts 3) 4 pts	**Nom :**

Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées .Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage …

Ex 1 : On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 5\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-2x} + x - 3.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthogonal du plan.

Partie A : Positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x-3)$.

1. Justifier que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$.
2. La courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ ont-elles un point commun ? Justifier.

Partie B : Étude de la fonction g

On note M le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathscr{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN.

1. Justifier que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, la distance MN est égale à $g(x)$.
2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   Pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, calculer $g'(x)$.
3. Montrer que la fonction g possède un maximum sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ que l'on déterminera.
   En donner une interprétation graphique.

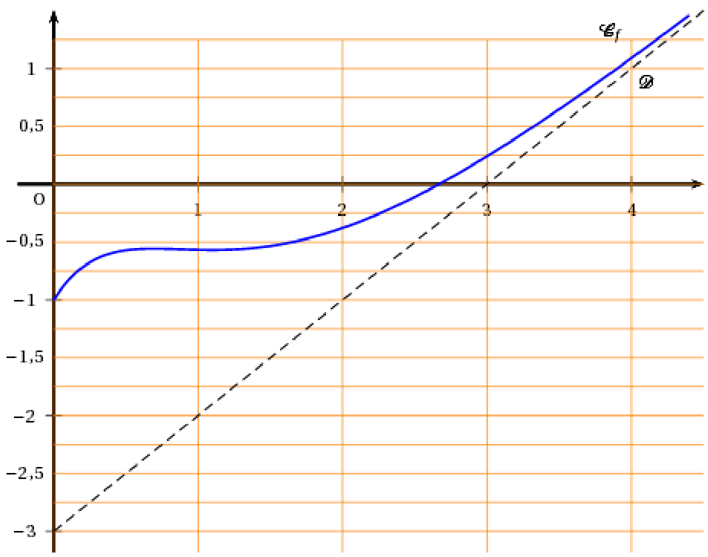
Partie C : Étude d'une aire

On considère la fonction $\mathscr{A}$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

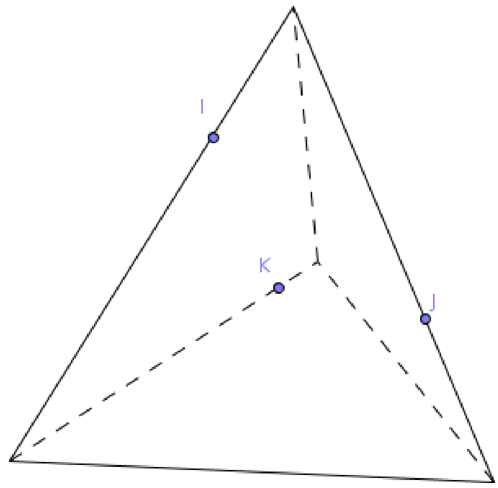
$$\mathscr{A}(x) = \int_0^x [f(t) - (t-3)]\,\mathrm{d}t.$$

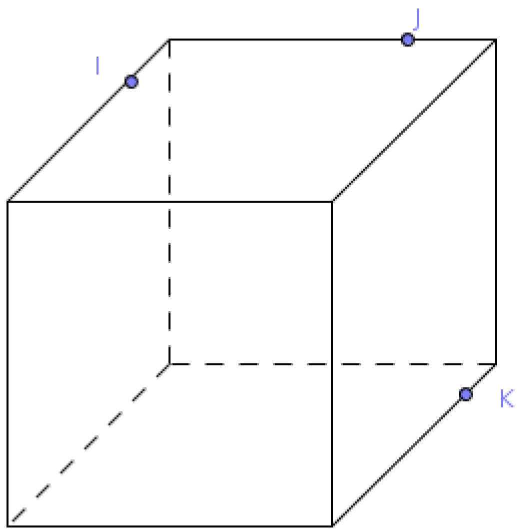
1. Hachurer sur le graphique donné en **annexe 1 (à rendre avec la copie)** le domaine dont l'aire est donnée par $\mathscr{A}(2)$.
2. Justifier que la fonction $\mathscr{A}$ est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3. Pour tout réel x strictement positif, calculer $\mathscr{A}(x)$.
4. Existe-t-il une valeur de x telle que $\mathscr{A}(x) = 2$?

Annexe 1



Ex 2 : Déterminer les sections des solides ci-dessous par le plan (IJK).





Ex 3 :

On considère les droites : $d_1 : \begin{cases} x = -t \\ y = 3+t \\ z = 1+2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, $d_2 : \begin{cases} x = 6+3t \\ y = 13+5t \\ z = 7+3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $d_3 : \begin{cases} x = -2+4t \\ y = 1+4t \\ z = 1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

1) Montrer que ces trois droites sont concourantes en un point dont on déterminera les coordonnées.

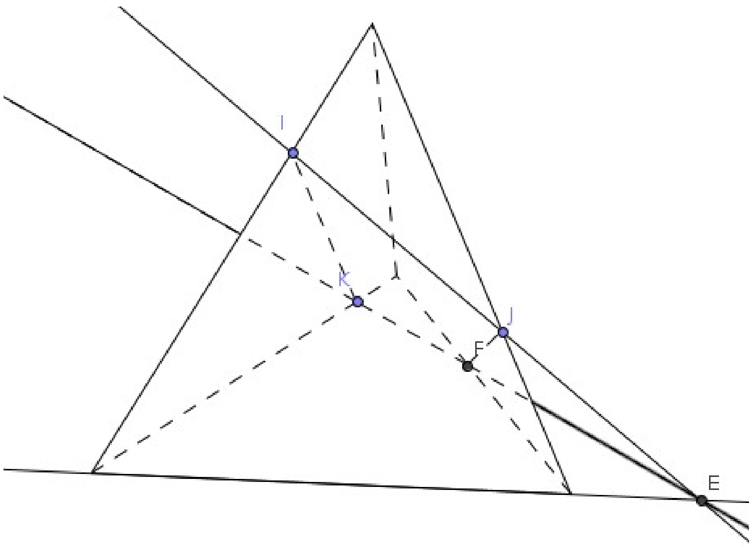
2) Ces droites sont-elles coplanaires ?

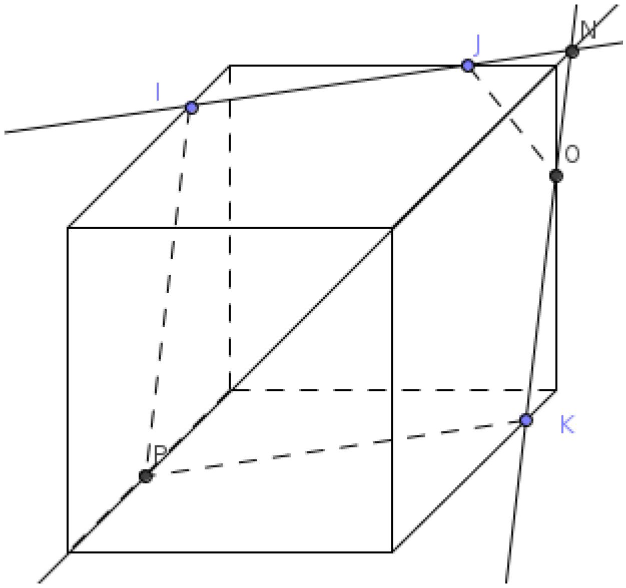
Correction :

Ex 1 :

http://www.apmep.fr/IMG/pdf/SAmerique_du_Nord_30_mai_2014corIFaure.pdf

Ex 2 :





Ex 3 :

On considère les droites : $d_1 : \begin{cases} x = -t \\ y = 3+t \\ z = 1+2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, $d_2 : \begin{cases} x = 6+3t \\ y = 13+5t \\ z = 7+3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $d_3 : \begin{cases} x = -2+4t \\ y = 1+4t \\ z = 1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

1) Montrer que ces trois droites sont concourantes en un point dont on déterminera les coordonnées.

2) Ces droites sont-elles coplanaires ?

1) Les vecteurs directeurs des trois droites $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_3}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires deux à deux , donc les droites ne sont pas parallèles deux à deux.

On cherche l'intersection entre d_1 et d_3 .

$$\begin{cases} -t = -2+4k \\ 3+t = 1+4k \\ 1+t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{1}{2} \\ t = 0 \end{cases}$$

En prenant $t=0$ dans l'équation de d_1 on obtient $A(0;3;1)$.

En prenant $t=-2$ dans l'équation de d_2 , on voit que $A \in d_2$.

Donc les trois droites sont concourantes en A.

2) Il suffit de vérifier si $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ et $\overrightarrow{n_3}$ sont coplanaires.

Pour cela on cherche a et b tels que :

$$\overrightarrow{n_3} = a\ \overrightarrow{n_1} + b\ \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -a+3b \\ 4 = a+5b \\ 0 = 2a+3b \end{cases}$$

On résout $\begin{cases} 4 = -a+3b \\ 4 = a+5b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -a+3b \\ 8 = 8b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$

De plus on a : $2 \times (-1) + 3 \times 1 = 1$

Donc la troisième équation n'est pas vérifiée.

Donc $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ et $\overrightarrow{n_3}$ ne sont pas coplanaires et les droites non plus.