TS 7 **<u>Devoir Surveillé n ° 6</u>**

<u>Nom :</u>

- Durée 1 h 20
- Calculatrices autorisées

Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées .La rédaction est importante . Soyez propre et clair.
Bon courage …

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 5\ln(x+3) - x.$$

1. **a.** On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0\,;\,+\infty[$.
   b. Donner, dans un tableau, les variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   c. Montrer que, pour tout x strictement positif on a
   $$f(x) = x\left(5\frac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right).$$
   d. En déduire la limite de f en $+\infty$.
   e. Compléter le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. On notera α cette solution.
   b. Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle $[14\,;\,15]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
   c. En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 4 \\ u_{n+1} &= 5\ln(u_n+3) \quad \text{pour tout entier naturel } n \neq 0 \end{cases}$$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = 5\ln(x+3).$$

En annexe 1 on a tracé dans un repère orthonormé la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathcal{C}$, courbe représentative de la fonction g.

1. **a.** Construire sur l'axe des abscisses de l'annexe 1 les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n) en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.
   b. Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite (u_n)
2. **a.** Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   b. Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$ où α est défini dans la partie A question 2. a.
   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.
   d. Démontrer alors la conjecture émise à la question 1. b. de la partie B.
   e. En utilisant la question 2. a. de la partie A, justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

B
0
N
U
S

2 pts

3. On considère l'algorithme suivant :

```
u prend la valeur 4
Répéter Tant que u − 14,2 < 0
    u prend la valeur de 5 ln(u + 3)
Fin du Tant que
Afficher u
```

a. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Justifier que cet algorithme se termine.

b. Donner la valeur que cet algorithme affiche (on arrondira à 5 décimales).

http://www.apmep.fr/IMG/pdf/NlleCaledonie_S_nov_2012_Corrige.pdf