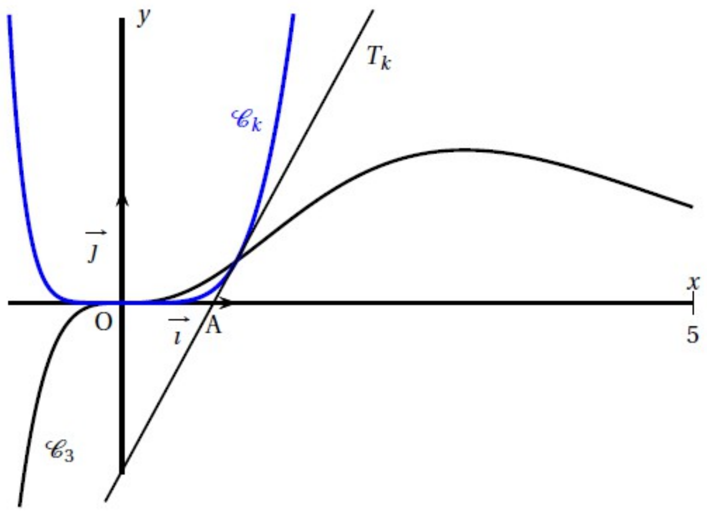
TS 9,10,11	**Devoir Surveillé n°5**	**Barème indicatif :**	**Nom :**
- Durée 2 h		**1) 8 pts**	
		2) 3 pts	**Prénom :**
- Une seule calculatrice autorisée		**3) 4 pts**	
		4) 5 pts	**Classe :**

Commentaires :
Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées . Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage ...

Exercice 1 : (sur 8 points)

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f_n(x)=x^n e^{-x}$. On note C_n sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan.
Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe C_k où k est un entier naturel non nul, sa tangente T_k au point d'abscisse 1 et la courbe C_3 .
La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\frac{4}{5};0\right)$.



1.
a) Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Étudier les variations de la fonction f_1 et dresser le tableau de variations de f_1 .
c) À l'aide du graphique, justifier que k est un entier supérieur ou égal à 2.

2.
a) Démontrer que pour $n \geqslant 1$, toutes les courbes C_n passent par le point O et un autre point dont on donnera les coordonnées.
b) Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,et pour tout réel x, $f'_n(x)=x^{n-1}(n-x)e^{-x}$.

3.
Sur le graphique, la fonction f_3 semble admettre un maximum atteint pour $x = 3$. Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

4.
a) Démontrer que la droite T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\frac{k-2}{k-1};0\right)$.
b) En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier k.

Exercice 2 : (sur 3 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, d'unité graphique 2cm, représenter les points M d'affixe z tels que :

1) En bleu $\arg(z)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$ 2) En vert $|z+1|=2$ 3) En noir $\begin{cases}\arg(z)=\frac{\pi}{4}[\pi] \\ |z|=3\end{cases}$.

Exercice 3 : (sur 4 points)

On considère deux nombres complexes donnés sous forme algébrique : $z_1=1+i\sqrt{3}$ et $z_2=1+i$ et le nombre complexe $z_3=\frac{z_1}{z_2}$. Répondre aux questions suivantes en faisant apparaître les calculs :

1. Écrire z_3 sous forme algébrique.
2. a) Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

   b) En déduire l'expression de z_3 sous forme trigonométrique.
3. Déduire des questions 1. et 2.b) les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 4 : (sur 5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.
A tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par : $z'=z^2+(1+\sqrt{3})z+3$.

1. Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.

   a) Démontrer que M est invariant si et seulement si $z^2+\sqrt{3}z+3=0$.

   b) En déduire qu'il existe deux points invariants dont vous donnerez les affixes sous forme algébrique, puis avec la notation exponentielle.
2. Soit A le point d'affixe $a=\frac{-\sqrt{3}+3i}{2}$, B le point d'affixe $b=\frac{-\sqrt{3}-3i}{2}$ et C le point d'affixe $c=-\sqrt{3}$.

   a) Que représente l'axe des réels pour le segment [AB] ? Justifier.

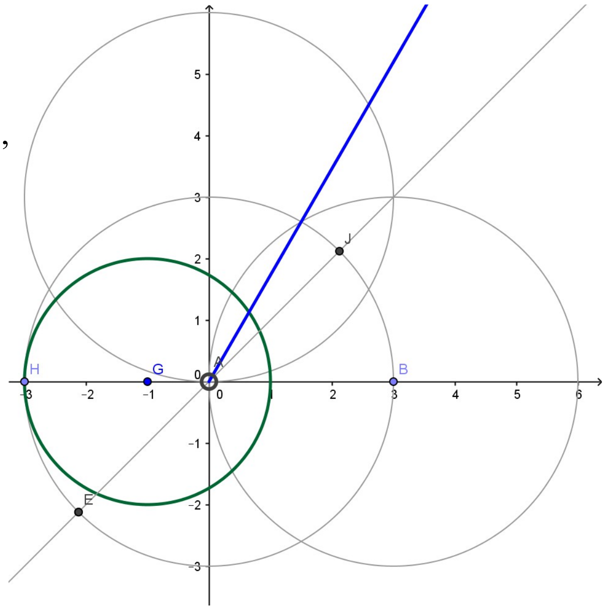
   b) Montrer que le triangle CAO est un triangle équilatéral.
3. Soit $z=x+iy$, où $x, y \in \mathbb{R}$.

   a) Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction x et y.

   b) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.

CORRECTION

Exercice 1 : voir http://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_Metropole_S_21_juin_2011.pdf(ex3)



Exercice 2 :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, d'unité graphique 2cm, représenter les points M d'affixe z tels que :

1) En bleu $\arg(z)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$

2) En vert $|z+1|=2$

3) En noir $\begin{cases}\arg(z)=\frac{\pi}{4}[\pi]\\ |z|=3\end{cases}$.

Exercice 3 : (sur 4 points)

On considère deux nombres complexes donnés sous forme algébrique : $z_1=1+i\sqrt{3}$ et $z_2=1+i$ et le nombre complexe $z_3=\frac{z_1}{z_2}$. Répondre aux questions suivantes en faisant apparaître les calculs :

1. Écrire z_3 sous forme algébrique.

$$z_3=\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \dots = \frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

2. a) Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

$$z_1=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad z_2=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

b) En déduire l'expression de z_3 sous forme trigonométrique.

$$z_3=\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

3. Déduire des questions 1. et 2.b) les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ donc } \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \text{ et } \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \text{ donc } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Exercice 4 : (sur 5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par : $z'=z^2+(1+\sqrt{3})z+3$.

1. Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.

   a) Démontrer que M est invariant si et seulement si $z^2+\sqrt{3}z+3=0$.

M est invariant ssi : M'=M $\Leftrightarrow z'=z \Leftrightarrow z=z^2+(1+\sqrt{3})z+3 \Leftrightarrow z^2+\sqrt{3}z+3=0$

   b) En déduire qu'il existe deux points invariants dont vous donnerez les affixes sous forme algébrique, puis avec la notation exponentielle.

Résolution de $z^2+\sqrt{3}z+3=0$ … $z_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}=\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$ $\quad z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}=\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

2. Soit A le point d'affixe $a=\frac{-\sqrt{3}+3\mathrm{i}}{2}$, B le point d'affixe $b=\frac{-\sqrt{3}-3\mathrm{i}}{2}$ et C le point d'affixe $c=-\sqrt{3}$.

   a) Que représente l'axe des réels pour le segment [AB] ? Justifier.

Les points A et B ont des affixes conjugués, ils sont donc symétrique par rapport à l'axe (Ox) ; (Ox) est donc la médiatrice de [AB]

   b) Montrer que le triangle CAO est un triangle équilatéral.

$|a|=|c|=\sqrt{3}$ donc $OA=OC$ soit CAO isocèle en O

de plus $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})=(\overrightarrow{OA},\vec{u})+(\vec{u},\overrightarrow{OC})=-\arg(a)+\arg(c)=-\frac{2\pi}{3}+\pi=\frac{\pi}{3}[2\pi]$

(on peut aussi calculer $AC=|c-a|$ pour prouver que $OA=OC=AC$)

3. Soit $z=x+\mathrm{i}y$, où $x, y\in\mathbb{R}$.

   a) Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction x et y.

Après calculs….

$z'=x^2-y^2+x+\sqrt{3}x+3+\mathrm{i}(2xy+y+\sqrt{3}y)$ soit $\mathrm{Re}(z')=x^2-y^2+x+\sqrt{3}x+3$ et $\mathrm{Im}(z')=2xy+y+\sqrt{3}y$

   b) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.

$M'\in(Ox) \Leftrightarrow \mathrm{I}m(z')=0 \Leftrightarrow 2xy+y+\sqrt{3}y=0 \Leftrightarrow y(2x+1+\sqrt{3})=0 \Leftrightarrow y=0$ ou $x=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$

L'ensemble E est donc la réunion de l'axe des ordonnées et de la droite d'équation $x=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$