Barème :	**Nom :**
1) 4 pts 2) 3 pts 3) 3 pts 4) 11 pts	**Prénom :** **Classe :**

TS 9, 10, 11 **Devoir Surveillé n ° 3**

- Durée 2 h
- **Une seule** calculatrice autorisée

Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées .Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage …

Exercice 1 :

Soit $f : x \longmapsto a + \dfrac{b}{x-c}$ où a , b et c sont des réels et dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	$-\infty$		5		$+\infty$
f	4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4

1. Déterminer les asymptotes de C_f .
2. En observant le tableau, quel réel parmi a , b et c peut-on obtenir sans calcul ? Le donner .
3. a) À partir de l'expression $f(x) = a + \dfrac{b}{x-c}$, déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   b) Quel deuxième réel cherché obtient-on ?
4. Par ailleurs, C_f admet une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -x$ au point d'abscisse 3. Déterminer le troisième réel cherché en justifiant votre démarche.
   Pensez à vérifier avec le grapheur de votre calculatrice que le résultat obtenu convient bien.

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie sur $[1;2]$ par $f(x) = x\,\mathrm{E}(x^2)$ où E représente la fonction partie entière.

1. a) Déterminer $\mathrm{E}(x^2)$ pour $1 \leq x < \sqrt{2}$.
   b) Déterminer $\mathrm{E}(x^2)$ pour $\sqrt{2} \leq x < \sqrt{3}$.
   c) Déterminer $\mathrm{E}(x^2)$ pour $\sqrt{3} \leq x < 2$.
2. Déduire de la question 1. l'expression de f sur $[1;2]$ sans utiliser la fonction partie entière E.
3. La fonction f est-elle continue en $\sqrt{2}$?

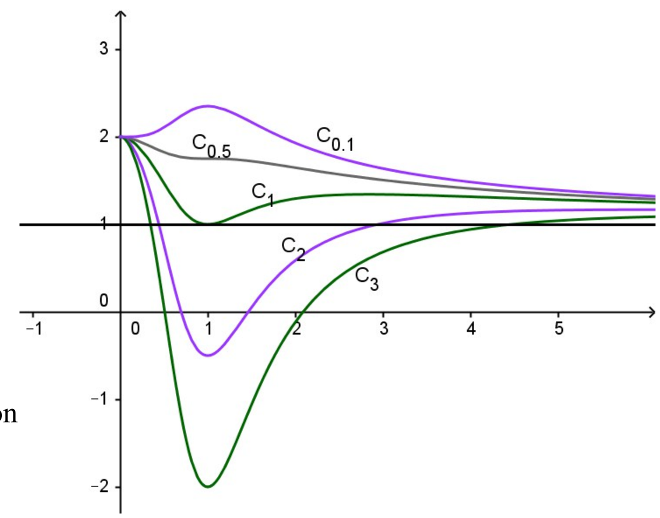
Exercice 3 :

Utiliser la dérivation pour montrer l'inégalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $2\sqrt{x} \leqslant x + 1$.

Exercice 4 :

Pour tout réel a strictement positif, on définit sur l'intervalle $[0;+\infty[$ la fonction g_a par $g_a(x) = \dfrac{x^4 + 2x^3 - 3ax^2 + 2}{x^4 + 1}$.

On note (C_a) la courbe représentative de la fonction g_a dans un repère du plan.



PARTIE A :

1. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 1$ est une asymptote à la courbe (C_a) .
2. Émettre une conjecture sur le nombre de point(s) d'intersection de (C_a) et (D) selon les valeurs du réel a.

PARTIE B :

On considère la fonction h_a définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $h_a(x)=2x^3-3ax^2+1$.

1. Soit $\mathrm{M}(x_\mathrm{M};y_\mathrm{M})$ montrer que M appartient à l'intersection de (C_a) et (D) si, et seulement si, $h_a(x_M)=0$.

2. Calculer la limite de h_a en $+\infty$.

3. Dresser le tableau de variation de h_a .

4. Dans cette question, on suppose que $a=2$.

   a) Démontrer que l'équation $h_2(x)=0$ admet exactement deux solutions α_1 et α_2 sur $[0;+\infty[$ avec $\alpha_1<\alpha_2$.

   b) En déduire le nombre de point(s) d'intersection de (C_2) et de (D).

   c) On considère l'algorithme de dichotomie suivant :

```
L1     a = 0 ;
L2     b = 1 ;
L3     Tant que b – a > 0,01 faire :
L4         (a+b)/2 → c
L5         Si h2(a)×h2(c) > 0 alors
L6             c → a
L7         Sinon
L8             c → b
L9         FinSi
L10        FinTantque
L11        Afficher a
L12        Afficher b
```

α) Justifier le choix des valeurs initiales $a = 0$ et $b = 1$.

β) Expliquer la démarche du test **Si...alors...Sinon…** (L5 à L9)

γ) Que peut-on dire de l'amplitude de l'intervalle obtenu à la fin de l'algorithme ?

δ) Compléter le tableau suivant :

étape	**Test $b-a>0{,}01$**	***c***	**Test $h_2(a)\times h_2(c)>0$**	***a***	***b***
Initialisation					
1					
2					

ε) Après les deux premières étapes, quel encadrement de α_1 obtient-on ?

ζ) A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α_1 à 0,01 près.

η) Donner un encadrement de α_2 à 0,01 près.

5. Dans cette question, on suppose que $a=0{,}5$.

   a) Déterminer le minimum de la fonction $h_{0,5}$ sur $[0;+\infty[$.

   b) Que peut-on en déduire concernant l'intersection de $(\mathrm{C}_{0,5})$ et de (D) ?

6. Déterminer selon les valeurs de *a*, le nombre de point(s) d'intersection de la courbe (C_a) et de la droite (D).

CORRECTION

Ex 1 :

Soit $f : x \mapsto a+\dfrac{b}{x-c}$ où a , b et c sont des réels et dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	$-\infty$		5		$+\infty$
f	4 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4

1) Déterminer les asymptotes de C_f .
La droite d'équation $x=5$ est une asymptote verticale.
La droite d'équation $y=4$ est une asymptote horizontale en + ∞ et en - ∞

2) En observant le tableau, quel réel parmi a , b et c peut-on obtenir sans calcul ? Le donner .
La fonction n'est pas définie en 5 . On en déduit que $c=5$.

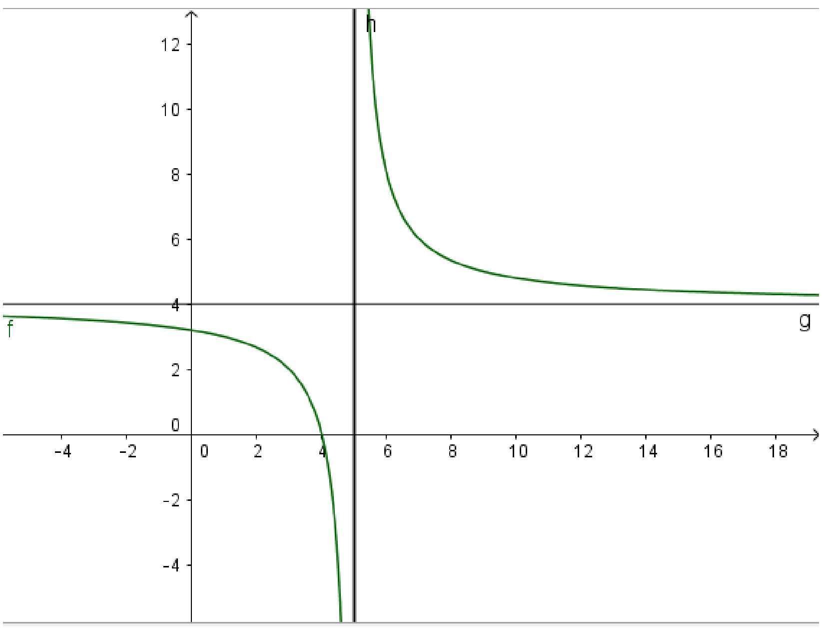
3) À partir de l'expression $f(x)=a+\dfrac{b}{x-c}$, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Quel deuxième réel cherché obtient-on ?
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$. D'après le tableau $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=4$. Par unicité de la limite, on en déduit que $a=4$.

4) Par ailleurs, on sait que C_f admet une tangente parallèle à la droite d'équation $y=x$ au point d'abscisse 3 . Déterminer le troisième réel cherché . Pensez à vérifier avec le grapheur de votre calculatrice que le résultat obtenu convient bien.
f est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition.

On sait que pour tout $x\neq5$, $f(x)=4+\dfrac{b}{x-5}$. Donc pour tout $x\neq5$, on a $f'(x)=-\dfrac{b}{(x-5)^2}$ et $f'(3)=-\dfrac{b}{4}$.

On en déduit que : $f'(3)=-1\Leftrightarrow-\dfrac{b}{4}=-1\Leftrightarrow b=4$.

Ainsi, le seul résultat possible pour f est : pour tout $x\neq5$, $f(x)=4+\dfrac{4}{x-5}$



Après vérification, on peut donc conclure que pour tout $x\neq5$, $f(x)=4+\dfrac{4}{x-5}$

Ex 2 :

Soit la fonction f définie sur $[1;2]$ par $f(x)=x\,\mathrm{E}(x^2)$ où E représente la fonction partie entière.

1) On utilise la croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$.

- **a) Déterminer $\mathrm{E}(x^2)$ pour $1\leq x<\sqrt{2}$.** - Si $x\in[1;\sqrt{2}[$, alors $1\leqslant x^2<2$ et $\mathrm{E}(x^2)=1$
- **b) Déterminer $\mathrm{E}(x^2)$ pour $\sqrt{2}\leq x<\sqrt{3}$.** - Si $x\in[\sqrt{2};\sqrt{3}[$, alors $2\leqslant x^2<3$ et $\mathrm{E}(x^2)=2$
- **c) Déterminer $\mathrm{E}(x^2)$ pour $\sqrt{3}\leq x<2$.** - Si $x\in[\sqrt{3};2[$, alors $3\leqslant x^2<4$ et $\mathrm{E}(x^2)=3$

2) Exprimer f sur $[1;2]$ sans utiliser la fonction partie entière E.La fonction f est-elle continue en $\sqrt{2}$?

- Si $x \in [1;\sqrt{2}[$ $f(x)=x$
- Si $x \in [\sqrt{2};\sqrt{3}[$ $f(x)=2x$
- Si $x \in [\sqrt{3};2[$, $f(x)=3x$
- Si $x=2$, alors $\mathrm{E}(x^2)=4$ et donc $f(x)=8$

3) La fonction f est-elle continue en $\sqrt{2}$?

$\lim\limits_{x \to \sqrt{2}-} f(x)=\sqrt{2}$ et $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}+} f(x)=2\sqrt{2}$. Les limites à droite et à gauche étant différentes, on en déduit que la fonction n'est pas continue en $\sqrt{2}$.

<u>Ex 3 :</u>

Utiliser la dérivation pour montrer l'inégalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $2\sqrt{x} \leqslant x+1$

On étudie sur $\mathbb{R}^+$, la fonction f définie par $f(x)=2\sqrt{x}-(x+1)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. $\forall x>0$, $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1=\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	0	$\searrow$	

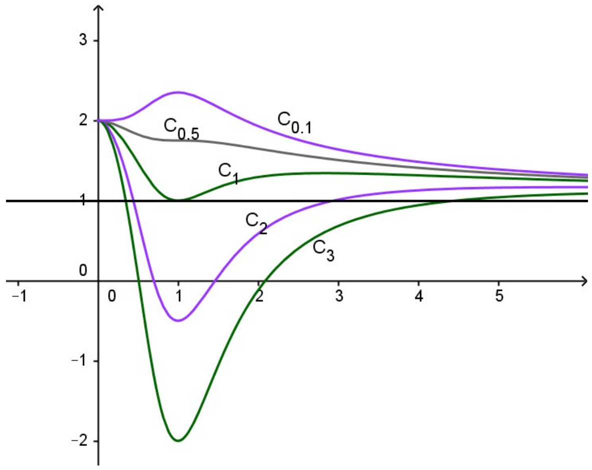
Ainsi pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant 0$, c'est à dire $2\sqrt{x} \leqslant x+1$.

Ex 4 :

Pour tout réel a strictement positif, on définit sur l'intervalle [0 ; +∞[la fonction g_a par $g_a(x)=\dfrac{x^4+2x^3-3ax^2+2}{x^4+1}$.

On note (C_a) la courbe représentative de la fonction g_a dans un repère du plan.

PARTIE A :



1. **Démontrer que la droite (D) d'équation $y=1$ est une asymptote à la courbe (C_a) .**

   On a $\lim\limits_{x\to+\infty} g_a(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4+2x^3-3ax^2+2}{x^4+1}=1$ donc la droite (D) d'équation $y=1$ est une asymptote à la courbe (C_a)

2. **Émettre une conjecture sur le nombre de point(s) d'intersection de (C_a) et (D) selon les valeurs du réel *a*.**

   Émettre une conjecture sur le nombre de point(s) d'intersection de (C_a) et (D) selon les valeurs du réel *a*.

   D'après le graphique on peut conjecturer que (C_a) et (D) ont :
   - 0 point d'intersection pour $0<a<1$
   - 1 point d'intersection pour $a=1$
   - 2 points d'intersections pour $a>1$

PARTIE B :

On considère la fonction h_a définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $h_a(x)=2x^3-3ax^2+1$.

1. **Soit $M(x_M;y_M)$ montrer que M appartient à l'intersection de (C_a) et (D) si, et seulement si, $h_a(x_M)=0$.**

   M∈(D) si et seulement si $y_M=1$; M∈ (C_a) si et seulement si $y_M=\dfrac{x_M^4+2x_M^3-3ax_M^2+2}{x_M^4+1}$

   donc M∈(D)∩ (C_a) si et seulement si $1=\dfrac{x_M^4+2x_M^3-3ax_M^2+2}{x_M^4+1}$ soit $x_M^4+1=x_M^4+2x_M^3-3ax_M^2+2$ soit $h_a(x_M)=0$

2. **Calculer la limite de h_a en +∞.** $\lim\limits_{x\to+\infty} h_a(x)=+\infty$

3. **Dresser le tableau de variation de h_a .** On a $h'_a(x)=6x(x-a)$ donc :

x	0		a		+∞
$h'_a(x)$		−	0	+	
$h_a(x)$	1	↘	$-a^3+1$	↗	+∞

4. **Dans cette question, on suppose que $a=2$.**

   a) Démontrer que l'équation $h_2(x)=0$ admet exactement deux solutions α_1 et α_2 sur $[0;+\infty[$ avec $\alpha_1<\alpha_2$.

   Pour $a=2$ on a :

x	0		2		+∞
$h'_2(x)$		−	0	+	
$h_2(x)$	1	↘	-7	↗	+∞

   En appliquant le TVI généralisé (ou théorème des bijections) sur $[0;2]$ et sur $[2;+\infty[$ on conclue que l'équation $h_2(x)=0$ admet exactement deux solutions α_1 et α_2 sur $[0;+\infty[$ avec $\alpha_1<\alpha_2$ et $\alpha_1\in[0;2]$ et $\alpha_2\in[2;+\infty[$

   b) En déduire le nombre de point(s) d'intersection de (C_2) et de (D).

d'après la question 1 de la partie B : (C_2) et (D) ont 2 points d'intersections d'abscisses α_1 et α_2.

c) On considère l'algorithme de dichotomie suivant :

```
L1     a = 0 ;
L2     b = 1 ;
L3     Tant que b – a > 0,01 faire :
L4         (a+b)/2 → c
L5         Si h2(a)×h2(c)>0 alors
L6             c → a
L7         Sinon
L8             c → b
L9         FinSi
L10        FinTantque
L11        Afficher a
L12        Afficher b
```

α) Justifier le choix des valeurs initiales *a* = 0 et *b* = 1.

Graphiquement $\alpha_1 \in [0;1]$ et cet algorithme cherche à approcher α_1

β) Expliquer la démarche du test Si...alors...Sinon… (L5 à L9)

Ce test permet de déterminer si $\alpha_1 \in [a;c]$ ou si $\alpha_1 \in [c;b]$ en effet :

si $h_2(a)\times h_2(c)<0$ alors $h_2(x)=0$ a sa solution sur $[a;c]$ (Théorème des bijections)

γ) Que peut-on dire de l'amplitude de l'intervalle obtenu à la fin de l'algorithme ?

A la fin de l'algorithme l'amplitude est strictement plus petite que 0,01

δ) Compléter le tableau suivant :

étape	Test $b - a > 0{,}01$	c	Test $h_2(a)\times h_2(c) > 0$	a	b
Initialisation				0	1
1	Oui	0,5	Non	0	0,5
2	Oui	0,25	Oui	0,25	0,5

ε) Après les deux premières étapes, quel encadrement de α_1 obtient-on ? $0{,}25<\alpha_1<0{,}5$

ζ) A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α_1 à 0,01 près. $0{,}44<\alpha_1<0{,}45$

η) Donner un encadrement de α_2 à 0,01 près. $2{,}94<\alpha_2<2{,}95$

5. **Dans cette question, on suppose que $a=0{,}5$.**

a) Déterminer le minimum de la fonction $h_{0,5}$ sur $[0;+\infty[$.

Le minimum de $h_{0,5}$ sur $[0;+\infty[$ est atteint en 0,5 et il vaut $-0{,}5^3+1=0{,}875$

b) Que peut-on en déduire concernant l'intersection de $(C_{0,5})$ et de (D) ?

Le minimum de $h_{0,5}$ sur $[0;+\infty[$ est strictement positif donc $h_{0,5}=0$ n'a pas de solutions sur $[0;+\infty[$.
D'après la question 1 de la partie B, l'intersection de $(C_{0,5})$ et de (D) est donc vide.

6. **Déterminer selon les valeurs de a, le nombre de point(s) d'intersection de la courbe (C_a) et de la droite (D).**

si $-a^3+1<0$ soit pour $a>1$ alors il y aura 2 points d'intersection.
si $-a^3+1=0$ soit pour $a=1$ alors il y aura 1 point d'intersection.
si $-a^3+1>0$ soit pour $0<a<1$ alors il y aura 0 point d'intersection.