TS 7 **Devoir Surveillé n ° 3**

- Durée 1 h 30
- Calculatrices autorisées (sauf ex 3)

Barème : 1) 6 pts 2) 4 pts 3) 10 pts	**Nom :**

Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées .Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage …

Ex 1 :

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-3		1		5		$+\infty$
$f(x)$	5	↘	-2	↗	-1	↘	-3	↗	1

1) Déterminer les extrema de f .

2) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $\mathbb{R}$? Justifier

3) Déterminer le signe de f .

4) Discuter suivant les valeurs du réel k , le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$. Compléter le tableau ci-dessous.
(avec des expressions du type $k=5$, $k\in[2;7[$ …)

0 solution	1 solution	2 solutions	3 solutions	4 solutions	5 solutions	6 solutions

Ex 2 :

Soit la fonction f définie sur $[1;2]$ par $f(x)=x^2\mathrm{E}(x^2)$ où E représente la fonction partie entière.

1) Déterminer $\mathrm{E}(x^2)$ sur $[\sqrt{3};2[$. En déduire l'expression de $f(x)$ sur $[\sqrt{3};2[$ sans utiliser la fonction partie entière E .

2) Exprimer f sur $[1;2]$ sans utiliser la fonction partie entière E ?

3) La fonction f est-elle continue en $\sqrt{2}$?

Ex 3 : SANS CALCULATRICE

Calculer, en justifiant avec soin, les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3-\dfrac{2}{1-2x}\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to2+}\left(4-x^2-\dfrac{4}{4-x^2}\right)$ 3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{9x+2}{2x-3}}$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$ 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x}$

CORRECTION

Ex 1 :

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-3		1		5		$+\infty$
$f(x)$	5	↘	-2	↗	-1	↘	-3	↗	1

1) Déterminer les extrema de f .

-1 est un maximum local atteint en 1.
-2 est un minimum local atteint en -3.
-3 est le minimum atteint en 5.

2) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $\mathbb{R}$? Justifier

- Sur $[-3;5]$, la fonction est majorée par -1 . Donc l'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution.
- Sur $]-\infty;-3]$, la fonction est continue et strictement décroissante.
$0\in f(]-\infty;-3])$, donc d'après le théorème des bijections, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α .
- Sur $[5;+\infty[$: même raisonnement et l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution β .

3) Déterminer le signe de f .

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	

4) Discuter suivant les valeurs du réel k , le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$. Compléter le tableau ci-dessous.

0 solution	1 solution	2 solutions	3 solutions	4 solutions	5 solutions	6 solutions
$k\geqslant 5$ $k<-3$	$k\in[1;5[$ $k=-3$	$k\in]-1;1[$ $k\in]-3;-2[$	$k=-1$ $k=-2$	$k\in]-2;-1[$		

Ex 2 :

Soit la fonction f définie sur $[1;2]$ par $f(x)=x^2\mathrm{E}(x^2)$ où E représente la fonction partie entière.

1) Déterminer $\mathrm{E}(x^2)$ sur $[\sqrt{3};2[$. En déduire l'expression de $f(x)$ sur $[\sqrt{3};2[$ sans utiliser la fonction partie entière E .

Si $\sqrt{3}\leqslant x<2$, alors $3\leqslant x^2<4$ car la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
On en déduit que $\mathrm{E}(x^2)=3$ et $f(x)=3x^2$.

2) Exprimer f sur $[1;2]$ sans utiliser la fonction partie entière E ?

En utilisant la croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$.

- Si $x\in[1;\sqrt{2}[$, alors $1\leqslant x^2<2$ et $\mathrm{E}(x^2)=1$, puis $f(x)=x^2$
- Si $x\in[\sqrt{2};\sqrt{3}[$, alors $2\leqslant x^2<3$ et $\mathrm{E}(x^2)=2$, puis $f(x)=2x^2$
- Si $x\in[\sqrt{3};2[$, alors $f(x)=3x^2$ (question 1)
- Si $x=2$, alors $\mathrm{E}(x^2)=4$ et $f(x)=16$

3) La fonction f est-elle continue en $\sqrt{2}$?

$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}-} f(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}+} f(x)=4$. Les limites à droite et à gauche étant différentes, on en déduit que la fonction n'est pas continue en $\sqrt{3}$.

Ex 3 : SANS CALCULATRICE

Calculer, en justifiant avec soin, les limites suivantes :

1) $\lim_{x \to -\infty} \left(3 - \frac{2}{1-2x}\right)$

$\lim_{x \to -\infty} (1-2x) = +\infty$, donc par quotient $\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{1-2x} = 0$

Par somme, on en déduit que $\lim_{x \to -\infty} \left(3 - \frac{2}{1-2x}\right) = 3$

2) $\lim_{x \to 2+} \left(4 - x^2 - \frac{4}{4-x^2}\right)$

$\lim_{x \to 2+} 4 - x^2 = 0-$, donc par quotient $\lim_{x \to 2+} \frac{4}{4-x^2} = -\infty$

Par somme, on en déduit que $\lim_{x \to 2+} \left(4 - x^2 - \frac{4}{4-x^2}\right) = +\infty$

3) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{9x+2}{2x-3}}$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{9x+2}{2x-3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{9x}{2x} = \frac{9}{2}$ (fonction rationnelle)

Comme $\lim_{X \to \frac{9}{2}} \sqrt{X} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, on a $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{9x+2}{2x-3}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

4) $\lim_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2+1}\right)$

$$x - \sqrt{x^2+1} = \frac{\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2 - x^2 - 1}{x + \sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

Ainsi, par quotient, $\lim_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2+1}\right) = 0$

5) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x-3}}{x}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $x - 3 \leqslant x$, donc $\sqrt{x-3} \geqslant \sqrt{x}$ par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$.

On en déduit que $\frac{\sqrt{x-3}}{x} \leqslant \frac{\sqrt{x}}{x}$, c'est à dire $0 \leqslant \frac{\sqrt{x-3}}{x} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$

Comme $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, on en déduit d'après le théorème des gendarmes que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x-3}}{x} = 0$