TS 7 **Devoir Surveillé n ° 2** - Durée 2 h - Calculatrices autorisées	**Barème :** 1) 6 2) 4 pts 3) 10 pts	**Nom :**

Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées .Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage …

Ex 1 : Quelques calculs ...

1) Déterminer la limite en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{(1+x)^{100}-1}{x}$

2) Calculer la dérivée (sans déterminer l'ensemble de dérivabilité) de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\sqrt{\dfrac{1}{2+x^2}}$

3) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe C_h (où h est la fonction de la question 2) au point d'abscisse 2.

4) Calculer la dérivée seconde (sans déterminer l'ensemble de dérivabilité) de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x)=x-\sqrt{x}$

Ex 2 :

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=3,458458458\ldots$ (n périodes 458)
$u_1=3,458$, $u_2=3,458458$ …
Montrer que la limite de (u_n) est un nombre rationnel.

Ex 3 :
L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0=3$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{7}{u_n}\right)$ (*)
On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel n , $u_n>0$
1) On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{7}{x}\right)$.
Démontrer que la fonction f admet un minimum. En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n>\sqrt{7}$

2) a) Soit n un entier naturel quelconque. Étudier le signe de $u_{n+1}-u_n$.
b) Pourquoi peut-on en déduire que la suite (u_n) est convergente ?
c) Déterminer ℓ
3) Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1}-\sqrt{7}=\dfrac{1}{2}\dfrac{(u_n-\sqrt{7})^2}{u_n}$.

4) On définit la suite (d_n) par $d_0=1$ et pour tout entier naturel n , $d_{n+1}=\dfrac{1}{2}d_n{}^2$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n , $\dfrac{1}{u_n}<1$.

Puis démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n-\sqrt{7}\leqslant d_n$.

b) Voici un algorithme :

Variables :	n et p sont des entiers naturels d est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de p
Initialisations :	Affecter à d la valeur 1 Affecter à n la valeur 0
Traitement :	Tant que $d>10^{-p}$ Affecter à d la valeur $0,5d^2$ Affecter à n la valeur $n+1$
Sortie :	Afficher n.

En entrant la valeur 9, l'algorithme affiche le nombre 5.
Quelle inégalité peut-on en déduire pour d_5 ?

Que peut-on dire de u_5 et de $\sqrt{7}$?

CORRECTION

Ex 1 : Quelques calculs ...

1) Déterminer la limite en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{(1+x)^{100}-1}{x}$

immédiat en utilisant le nombre dérivé en 0 de la fonction $x \longmapsto (1+x)^{100}$. On obtient 100.

2) Calculer la dérivée de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\sqrt{\frac{1}{2+x^2}}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $h(x)=\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}$. On obtient $h'(x)=-\frac{x}{\sqrt{2+x^2}(2+x^2)}$

3) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe C_h (où h est la fonction de la question 2) au point d'abscisse 2.

On applique la formule :
$y=h'(2)(x-2)+h(2)$
On a $h'(2)=-\frac{1}{3\sqrt{6}}$ et $h(2)=\frac{1}{\sqrt{6}}$
On obtient $y=-\frac{1}{3\sqrt{6}}x+\frac{5}{3\sqrt{6}}$

4) Calculer **l**a dérivée seconde de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x)=x-\sqrt{x}$

$g'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $g''(x)=\frac{1}{4x\sqrt{x}}$

Ex 2 :

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=3,458458458\ldots$ (n périodes 458)
$u_1=3,458$, $u_2=3,458458$ …
Montrer que la limite de (u_n) est un nombre rationnel.

Pour tout $n\geqslant 0$, on a :

$$u_n = 3+458\times\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1000}\right)^i = 3+458\times\frac{1}{1000}\times\frac{1-\left(\frac{1}{1000}\right)^n}{1-\frac{1}{1000}} = 3+\frac{458}{999}\times\left(1-\left(\frac{1}{1000}\right)^n\right)$$

On a $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1000}\right)^n=0$ (suite géométrique de raison comprise strictement entre -1 et 1)

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n=3+\frac{458}{999}=\frac{3455}{999}$

Ex 3 :

http://www.apmep.fr/IMG/pdf/Metropolesept2012corrige.pdf