TS 7 Devoir Surveillé n ° 2	**Barème :**	**Nom :**
- Durée 2 h - Calculatrices autorisées	1) 6 pts 2) 4 pts 3) 8 pts 3) 4 pts	

Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées .Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage …

Ex 1 : Quelques calculs ...

1) Déterminer la limite en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{(1+x)^{1000}-1}{x}$

2) Calculer la dérivée (sans déterminer l'ensemble de dérivabilité) de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\sqrt{\dfrac{1}{2+x^2}}$

3) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe C_h (où h est la fonction de la question 2) au point d'abscisse 1.

4) Calculer la dérivée seconde de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x)=\sqrt{x}-x$

Ex 2 :

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
1 VARIABLES	1 VARIABLES	1 VARIABLES
2 deg EST_DU_TYPE NOMBRE	2 deg EST_DU_TYPE NOMBRE	2 deg EST_DU_TYPE NOMBRE
3 i EST_DU_TYPE NOMBRE	3 i EST_DU_TYPE NOMBRE	3 i EST_DU_TYPE NOMBRE
4 P EST_DU_TYPE LISTE	4 P EST_DU_TYPE LISTE	4 P EST_DU_TYPE LISTE
5 Q EST_DU_TYPE LISTE	5 Q EST_DU_TYPE LISTE	5 Q EST_DU_TYPE LISTE
6 DEBUT_ALGORITHME	6 DEBUT_ALGORITHME	6 DEBUT_ALGORITHME
7 LIRE deg	7 LIRE deg	7 LIRE deg
8 POUR i ALLANT_DE 0 A deg	8 POUR i ALLANT_DE 0 A deg	8 POUR i ALLANT_DE 0 A deg
9 DEBUT_POUR	9 DEBUT_POUR	9 DEBUT_POUR
10 LIRE P[i]	10 LIRE P[i]	10 LIRE P[i]
11 FIN_POUR	11 FIN_POUR	11 FIN_POUR
12 POUR i ALLANT_DE 0 A deg	12 POUR i ALLANT_DE 0 A deg-1	12 POUR i ALLANT_DE 0 A deg-1
13 DEBUT_POUR	13 DEBUT_POUR	13 DEBUT_POUR
14 Q[i+1] PREND_LA_VALEUR (i+1)*P[i+1]	14 Q[i] PREND_LA_VALEUR (i+1)*P[i+1]	14 Q[i] PREND_LA_VALEUR (i)*P[i]
15 FIN_POUR	15 FIN_POUR	15 FIN_POUR
16 FIN_ALGORITHME	16 FIN_ALGORITHME	16 FIN_ALGORITHME

1) Les 11 premières lignes de ces algorithmes sont identiques . Elles permettent de définir un polynôme de degré « deg » et de coefficients P[0], P[1], …, P[deg]

a) On considère le polynôme P défini par $\mathrm{P}(\mathrm{x})=5\mathrm{x}^4-2\mathrm{x}^3+\dfrac{3}{4}\mathrm{x}-1$. Déterminer les variables deg et P[i] à saisir dans l'algorithme.

b) Même question pour $\mathrm{Q}(x)=2x^2-3x^3-5$

2) Un de ces algorithmes fournit la dérivée du polynôme P.

a) Quel est cet algorithme ?

b) Appliquer cet algorithme au polynôme P de la question 1)a) et donner les variables obtenues.

Ex 3 :

(u_n) est la suite définie par $u_0=6$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=\sqrt{u_n+20}$.

1) Étude de la convergence de (u_n) .

a) Montrer que , pour tout entier naturel n , $u_n\geqslant 5$.

b) Montrer que (u_n) est décroissante.

c) Que peut-on déduire des questions précédentes ?

2) Détermination de la limite de (u_n) .

a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1}-5\leqslant\dfrac{1}{10}(u_n-5)$

b) Montrer que, pour tout entier naturel n , $0\leqslant u_n-5\leqslant\dfrac{1}{10^n}$

c) En déduire la limite de (u_n) .

Ex 4 :

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=7{,}468468468\ldots$ (n périodes 468) . C'est à dire $u_1=7{,}468$, $u_2=7{,}468468\ldots$

Montrer que la limite de (u_n) est un nombre rationnel.

CORRECTION

Ex 1 : Quelques calculs ...

1) Déterminer la limite en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{(1+x)^{1000}-1}{x}$

immédiat en utilisant le nombre dérivé en 0 de la fonction $x \longmapsto (1+x)^{1000}$. On obtient 1000.

2) Calculer la dérivée de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\sqrt{\dfrac{1}{2+x^2}}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2+x^2}}$. On obtient $h'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{2+x^2}\,(2+x^2)}$

3) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe C_h (où h est la fonction de la question 2) au point d'abscisse 1.

On applique la formule :
$y=h'(1)(x-1)+h(1)$
On a $h'(1)=-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ et $h(1)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
On obtient $y=-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}x+\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$

4) Calculer **l**a dérivée seconde de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x)=\sqrt{x}-x$

$g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-1$ et $g''(x)=-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$

Ex 2 :

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
1 VARIABLES	1 VARIABLES	1 VARIABLES
2 deg EST_DU_TYPE NOMBRE	2 deg EST_DU_TYPE NOMBRE	2 deg EST_DU_TYPE NOMBRE
3 i EST_DU_TYPE NOMBRE	3 i EST_DU_TYPE NOMBRE	3 i EST_DU_TYPE NOMBRE
4 P EST_DU_TYPE LISTE	4 P EST_DU_TYPE LISTE	4 P EST_DU_TYPE LISTE
5 Q EST_DU_TYPE LISTE	5 Q EST_DU_TYPE LISTE	5 Q EST_DU_TYPE LISTE
6 DEBUT_ALGORITHME	6 DEBUT_ALGORITHME	6 DEBUT_ALGORITHME
7 LIRE deg	7 LIRE deg	7 LIRE deg
8 POUR i ALLANT_DE 0 A deg	8 POUR i ALLANT_DE 0 A deg	8 POUR i ALLANT_DE 0 A deg
9 DEBUT_POUR	9 DEBUT_POUR	9 DEBUT_POUR
10 LIRE P[i]	10 LIRE P[i]	10 LIRE P[i]
11 FIN_POUR	11 FIN_POUR	11 FIN_POUR
12 POUR i ALLANT_DE 0 A deg	12 POUR i ALLANT_DE 0 A deg-1	12 POUR i ALLANT_DE 0 A deg-1
13 DEBUT_POUR	13 DEBUT_POUR	13 DEBUT_POUR
14 Q[i] PREND_LA_VALEUR (i+1)*P[i+1]	14 Q[i] PREND_LA_VALEUR (i+1)*P[i+1]	14 Q[i] PREND_LA_VALEUR (i)*P[i]
15 FIN_POUR	15 FIN_POUR	15 FIN_POUR
16 FIN_ALGORITHME	16 FIN_ALGORITHME	16 FIN_ALGORITHME

1) Les 11 premières lignes de ces algorithmes sont identiques . Elles permettent de définir un polynôme de degré « deg » et de coefficients P[0], P[1], …, P[deg]

a) On considère le polynôme P défini par $P(x)=5x^4-2x^3+\dfrac{3}{4}x-1$

Déterminer les variables deg et P[i] à saisir dans l'algorithme.

Deg=4 , $P[0]=-1$, $P[1]=\dfrac{3}{4}$, $P[2]=0$, $P[3]=-2$, $P[4]=5$

b) Même question pour $Q(x)=2x^2-3x^3-5$

Deg=3 , $P[0]=-5$, $P[1]=0$, $P[2]=2$, $P[3]=-3$

2) Un de ces algorithmes fournit la dérivée du polynôme P.

a) Quel est cet algorithme ?

Le numéro 2

b) Appliquer cet algorithme au polynôme P de la question 1)A) et donner les variables obtenues.

$Q[0]=\dfrac{3}{4}$, $Q[1]=0$, $Q[2]=-6$ et $Q[3]=20$

Ex 3 :

(u_n) est la suite définie par $u_0=6$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\sqrt{u_n+20}$.
1) Étude de la convergence de (u_n) .
a) Montrer que , pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 5$.
Immédiat par récurrence
b) Montrer que (u_n) est décroissante.
Immédiat par récurrence
c) Que peut-on déduire des questions précédentes ?
La suite (u_n) est décroissante et minorée par 5 . On en déduit qu'elle est convergente.
2) Détermination de la limite de (u_n) .
a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-5 \leqslant \frac{1}{10}(u_n-5)$

Pour tout entier naturel n , on a :
$$u_{n+1}-5=\sqrt{u_n+20}-5=\frac{(\sqrt{u_n+20}-5)(\sqrt{u_n+20}+5)}{\sqrt{u_n+20}+5}=\frac{u_n-5}{\sqrt{u_n+20}+5}=\frac{1}{\sqrt{u_n+20}+5}(u_n-5)$$
De plus,
$$u_n \geqslant 5 \Rightarrow u_n+20 \geqslant 25 \Rightarrow \sqrt{u_n+20} \geqslant 5 \Rightarrow \sqrt{u_n+20}+5 \geqslant 10 \Rightarrow \frac{1}{10} \geqslant \frac{1}{\sqrt{u_n+20}+5}$$
Ainsi $\frac{1}{\sqrt{u_n+20}+5}(u_n-5) \leqslant \frac{1}{10}(u_n-5) \Rightarrow u_{n+1}-5 \leqslant \frac{1}{10}(u_n-5)$

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n-5 \leqslant \frac{1}{10^n}$

On a vu que , pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 5$, d'où $0 \leqslant u_n-5$
Soit $\mathrm{P}(n)$: « $u_n-5 \leqslant \frac{1}{10^n}$ »

Initialisation :
$5-5 \leqslant \frac{1}{10^0}$, d'où P(0) est vraie.

Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
Supposons que $\mathrm{P}(n)$ soit vraie . On a donc $u_n-5 \leqslant \frac{1}{10^n}$
Montrons que $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire $u_{n+1}-5 \leqslant \frac{1}{10^{n+1}}$
A la question 2) a), on a vu que :
$$u_{n+1}-5 \leqslant \frac{1}{10}(u_n-5) \Rightarrow u_{n+1}-5 \leqslant \frac{1}{10}\,\frac{1}{10^n} \Rightarrow u_{n+1}-5 \leqslant \frac{1}{10^{n+1}}$$

Conclusion :

La propriété $\mathrm{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) En déduire la limite de (u_n) .

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{10^n}$ =0 (suite géométrique de raison comprise strictement entre -1 et 1)
D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n-5)$ =0 et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ =5

Ex 4 :

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 7{,}468468468\ \dots$ (n périodes 468)
$u_1 = 7{,}468$, $u_2 = 7{,}468468$ …
Montrer que la limite de (u_n) est un nombre rationnel.

Pour tout $n \geqslant 0$, on a :

$$u_n = 7 + 468 \times \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{1000}\right)^i = 7 + 468 \times \frac{1}{1000} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{1000}\right)^n}{1 - \frac{1}{1000}} = 7 + \frac{468}{999} \times \left(1 - \left(\frac{1}{1000}\right)^n\right)$$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{1000}\right)^n = 0$ (suite géométrique de raison comprise strictement entre -1 et 1)

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 7 + \frac{468}{999} = \frac{7461}{999}$