TS 9,10,11 **Devoir Surveillé n°1**	**Barème indicatif :**	**Nom :**
- Durée 2 h	**1) 4 pts**	
	2) 7 pts	**Prénom :**
- Une seule calculatrice autorisée	**3) 4 pts**	
	4) 7 pts	**Classe :**

Commentaires :
Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées . Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage ...

Exercice 1 :

On note pour tout entier naturel *n*, $\mathrm{P}(n)$ la proposition suivante : « $\sum_{i=0}^{i=n} i(i+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ ».

1. Montrer que $\mathrm{P}(0)$ et $\mathrm{P}(1)$ et sont vraies.
2. Démontrer par récurrence que cette proposition est vraie pour tout entier naturel *n*.

Exercice 2 :

Partie A :

On considère l'algorithme suivant :

Variables :
  N est un entier naturel
  U est un nombre réel
  I est un entier naturel
Initialisation :
  U prend la valeur 1.
Entrée :
  Saisir N
Traitement :
  Pour I allant de 1 à N faire
    U prend la valeur $\frac{U^3}{3}+\frac{U^2}{2}-\frac{U}{2}+\frac{1}{2}$
  Fin pour
Sortie :
  Afficher U

Faire fonctionner cet algorithme pour $N=3$ et compléter le tableau ci-dessous :
(on donnera des valeurs approchées au millième)

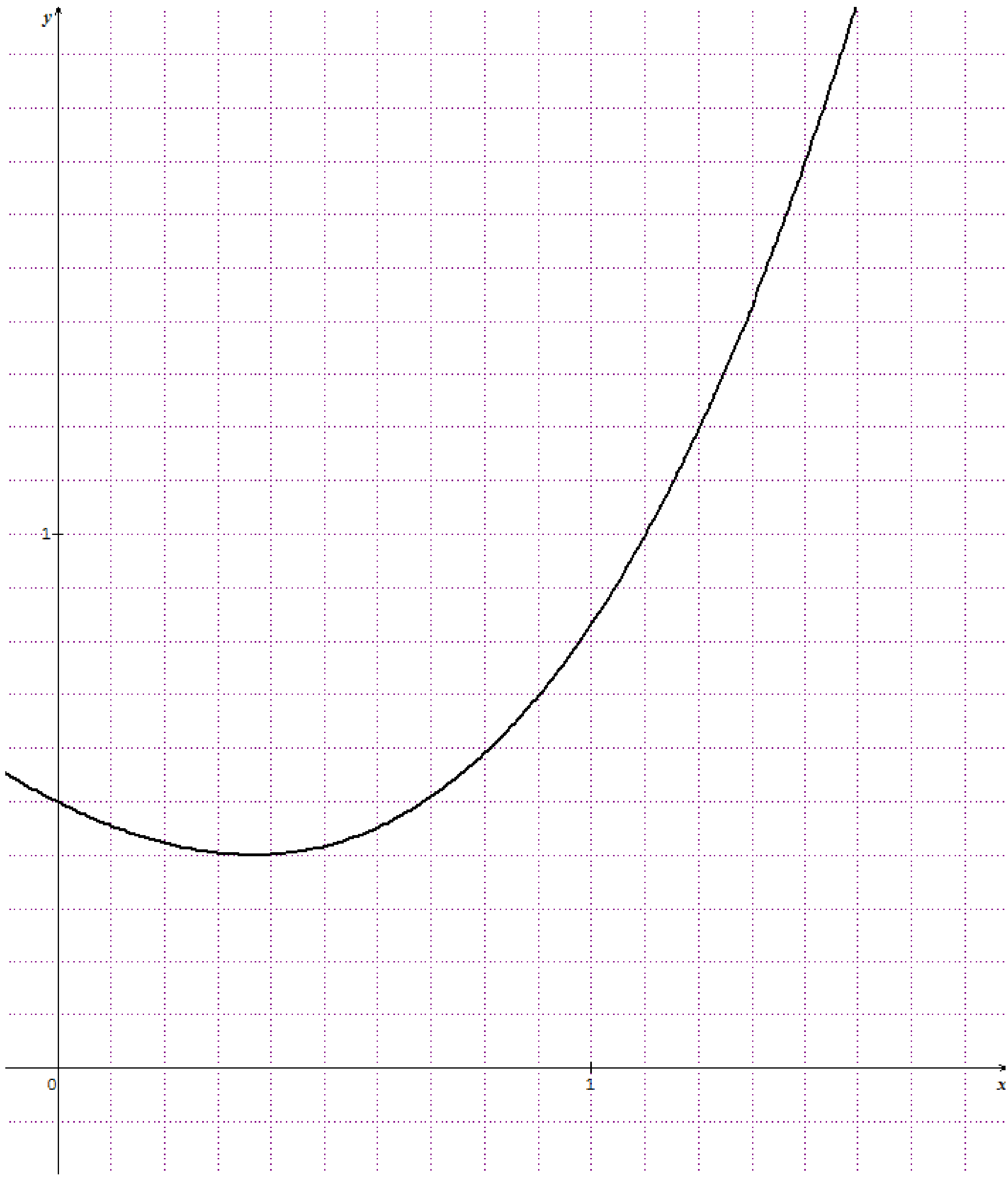
Initialisation :	N			
Entrée :	U			
Traitement :		Etape 1	Etape 2	Etape 3
	I			
	U			
	N			
Sortie :	U			

Partie B :

Soit *f* la fonction définie sur ℝ par $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$.

1. a) Étudier les variations de *f* sur ℝ. En déduire en particulier que *f* est croissante sur [0,4 ; 1,2].
   b) Montrer que si $x \in$ [0,4 ; 1,2], alors $f(x) \in$ [0,4 ; 1,2].

2. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.
   a) On a tracé ci-dessous la courbe représentative de *f*. Construire les cinq premiers termes de la suite (u_n) sur le graphique donné.
   On laissera les traits de construction apparents.
   b) Conjecturer le sens de variations de (u_n) .
   c) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0{,}4\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 1{,}2$.
   d) Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?



Exercice 3 :

Tous les résultats seront donnés sous la forme de fractions.
Une agence de voyage propose exclusivement trois destinations : Agadir, Fès et Marrakech.
On sait que 50% des clients choisissent de se rendre à Agadir.

Au retour de leur voyage, tous les clients de l'agence répondent à une enquête de satisfaction qui montre que 60% des clients ayant choisi Agadir sont satisfaits. On sait aussi que 90% des clients ayant choisi de se rendre à Marrakech sont satisfaits de leur voyage.

On prélève au hasard un questionnaire dans la pile des questionnaires recueillis.
On note les événements :
A : « le client a choisi Agadir comme destination » ;
F : « le client a choisi Fès comme destination » ;
M : « le client a choisi Marrakech comme destination » ;
S : « le client est satisfait de son voyage ».

1. Illustrer l'énoncé avec un arbre, que l'on complétera au fur et à mesure de la résolution de l'exercice.
2. a) Traduire par une phrase l'événement $A \cap S$, puis calculer sa probabilité.
   b) L'enquête montre aussi que :
      - 72% des clients de l'agence sont satisfaits
      - 24% des clients ont choisi de se rendre à Fès et sont revenus satisfaits de leur voyage .

   Calculer la probabilité que le questionnaire choisi soit celui d'un client ayant choisi Marrakech comme destination et revienne satisfait de son voyage.
   c) En déduire la proportion de clients ayant choisi de se rendre à Marrakech.

Exercice 4 :

Tous les résultats seront donnés sous la forme de fractions.
Un professeur dispose d'une trousse T contenant trois stylos bleus et deux stylos rouges indiscernables au toucher. Avant de corriger son paquet de copies, il se livre à une petite expérience.

Partie A :

Il considère l'expérience suivante : il tire successivement trois fois de suite un stylo de la trousse T, en remettant à chaque fois le stylo dans la trousse.
Il appelle X le nombre de fois où il a obtenu un stylo rouge.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité d'avoir obtenu exactement une fois un stylo rouge.

   Le professeur décide de corriger son paquet uniquement si cette probabilité est supérieure à $\frac{1}{2}$. Sinon il décide de remettre la correction au lendemain … Qu'en est-il ?
3. Déterminer l'espérance mathématique de X et interpréter ce résultat avec 1000 expériences.

Partie B :

Le lendemain, il procède à une nouvelle expérience :
• il tire un stylo de la trousse T . S'il est rouge, il s'arrête et commence à corriger son paquet, sinon il le remet dans la trousse et il tire un stylo à nouveau ;
• si ce deuxième stylo est rouge, il s'arrête et commence à corriger son paquet, sinon il le remet dans la trousse et il tire un stylo pour la troisième fois.
• si ce troisième stylo est bleu, il remet à nouveau la correction au lendemain et s'il est rouge il corrige.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré de probabilités.
2. Il appelle Y le nombre de stylos rouges obtenues lors d'une expérience.
   a) Déterminer les valeurs prises par Y, c'est à dire $Y(\Omega)$
   b) Déterminer la loi de probabilité de Y et son espérance mathématique.
3. Il appelle N le nombre de tirages effectués lors d'une expérience.
   a) Déterminer les valeurs prises par N.
   b) Déterminer la loi de probabilité de N et son espérance mathématique.
4. Il appelle proportion moyenne de stylos rouges le rapport de l'espérance du nombre de stylos rouges obtenus sur l'espérance du nombre de tirages. Montrer que la proportion moyenne de stylos rouges dans l'expérience est la même que la proportion de stylos rouges dans la trousse.

Correction :

Ex 1 :

On note pour tout entier naturel n, $\mathrm{P}(n)$ la proposition suivante : « $\sum_{i=0}^{i=n} i(i+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ ».

1/ Montrer que $\mathrm{P}(0)$ et $\mathrm{P}(1)$ sont vraies.

pour $n=0$: $\sum_{i=0}^{i=n} i(i+1)=0\times(0+1)=0$ d'une part. D'autre part $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}=\frac{0\times(0+1)\times(0+2)}{3}=0$.
Donc $\mathrm{P}(0)$ est vraie.

pour $n=1$: $\sum_{i=0}^{i=n} i(i+1)=0\times(0+1)+1\times(1+1)=2$ d'une part. D'autre part $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}=\frac{1\times(1+1)\times(1+2)}{3}=2$.
Donc $\mathrm{P}(1)$ est vraie.

2/ Démontrer par récurrence que cette proposition est vraie pour tout entier naturel n.

- La propriété est initialisée d'après la question 1/.

On suppose qu'il existe un rang $\mathrm{N}\geqslant 0$ auquel $\mathrm{P}(\mathrm{N})$ est vraie soit $\sum_{i=0}^{i=N} i(i+1)=\frac{N(N+1)(N+2)}{3}$.

Au rang N+1 on a
$\sum_{i=0}^{i=N+1} i(i+1)=\sum_{i=0}^{i=N} i(i+1)+(N+1)(N+2)=\frac{N(N+1)(N+2)}{3}+(N+1)(N+2)=\ldots=\frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{3}$,
soit $\mathrm{P}(\mathrm{N}+1)$ vraie

- La propriété est donc héréditaire.

En conclusion, nous venons de démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\mathrm{P}(n)$ est vraie.

Exercice 2 :

Partie A :

On considère l'algorithme suivant :

Variables :
N est un entier naturel
U est un nombre réel
I est un entier naturel
Initialisation :
U prend la valeur 1.
Entrée :
Saisir N
Traitement :
Pour I allant de 1 à N faire
U prend la valeur $\frac{\mathrm{U}^3}{3}+\frac{\mathrm{U}^2}{2}-\frac{\mathrm{U}}{2}+\frac{1}{2}$
Fin pour
Sortie :
Afficher U

Initialisation :	N	3		
Entrée :	U	1		
Traitement :		Etape 1	Etape 2	Etape 3
	I	1	2	3
	U	0,833	0,623	0,463
	N	3	3	3
Sortie :	U	0,46		

Partie B :

Soit *f* la fonction définie sur ℝ par $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$.

3. a) *f* est une fonction polynomiale, donc *f* est dérivable sur ℝ. Pour tout $x \in$ ℝ, on a $f'(x)=x^2+x-\frac{1}{2}$.

$\Delta=1-4\times1\times\left(\frac{-1}{2}\right)=3$, donc $f'(x)$ admet deux racines : $x_1=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ et $x_2=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. On en déduit les variations de *f* sur ℝ :

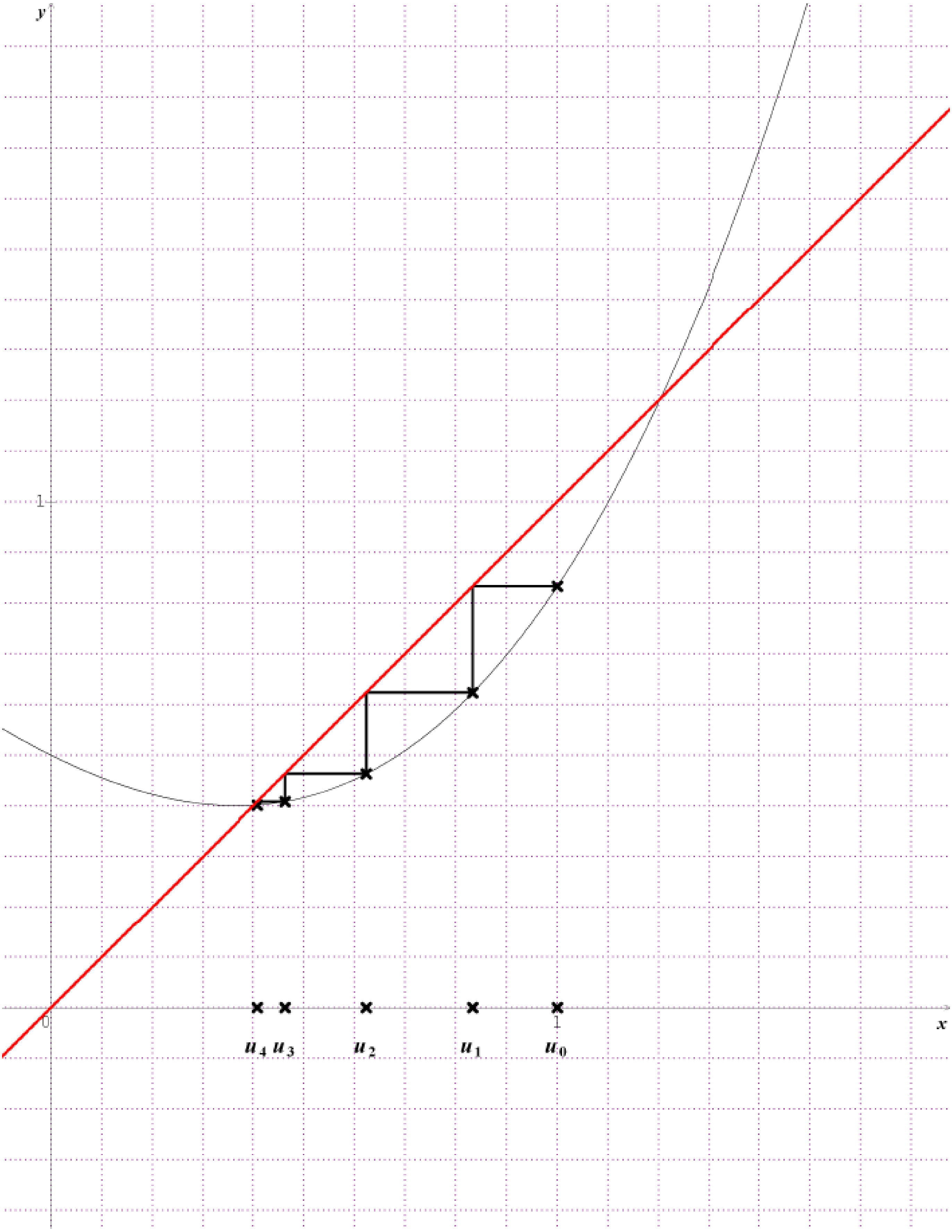
x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de *f*		↗	$f(x_1)$	↘	$f(x_2)$	↗	

$x_2\approx0{,}366$ Et d'après le tableau ci-dessus, *f* est strictement croissante sur $[x_2;+\infty[$, donc en particulier que *f* est croissante sur [0,4 ; 1,2].

b) Comme *f* est strictement croissante sur [0,4 ; 1,2], on a $0{,}4\leqslant x\leqslant1{,}2 \Rightarrow f(0{,}4)\leqslant f(x)\leqslant f(1{,}2)$.

Or $f(0{,}4)\approx0{,}401>0{,}4$ et $f(1{,}2)=1{,}196<1{,}2$. Donc si $x \in$ [0,4 ; 1,2], alors $0{,}4\leqslant f(0{,}4)\leqslant f(x)\leqslant f(1{,}2)\leqslant1{,}2$, par conséquent $f(x) \in$ [0,4 ; 1,2].

4. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=1$ et pour tout $n \in$ ℕ, $u_{n+1}=f(u_n)$.



a)

b) Il semble que la suite (u_n) est décroissante.

c) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, (P_n) : $0{,}4 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1{,}2$.

Initialisation :

$u_0 = 1$ et $u_1 = 0{,}5$, donc on a bien $0{,}4 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 1{,}2$, donc (P_0) est vraie.

Hérédité :

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que (P_n) est vraie, c'est-à-dire tel que $0{,}4 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant 1{,}2$. montrons que (P_{k+1}) est vraie aussi, c'est-à-dire que $0{,}4 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 1{,}2$.

On sait que $0{,}4 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant 1{,}2$, or f est croissante sur $[0{,}4;1{,}2]$, donc $f(0{,}4) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k) \leqslant f(1{,}2)$. Or $f(0{,}4) \geqslant 0{,}4$ et $f(1{,}2) \leqslant 1{,}2$, on en déduite que $0{,}4 \leqslant f(0{,}4) \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant f(1{,}2) \leqslant 1{,}2$.

d) On peut en déduire que la suite (u_n) est décroissante et bornée. Comme (u_n) est décroissante et minorée, (u_n) converge.

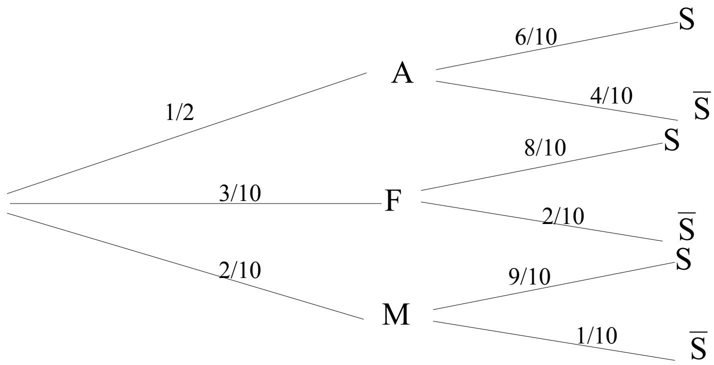
Exercice 3 :

Une agence de voyage propose exclusivement trois destinations : Agadir, Fès et Marrakech.

On sait que 50% des clients choisissent de se rendre à Agadir, donc $P(A)=\frac{1}{2}$.

Au retour de leur voyage, tous les clients de l'agence répondent à une enquête de satisfaction qui montre que 60% des clients ayant choisi Agadir sont satisfaits, donc $P_A(S)=\frac{6}{10}$. On sait aussi que 90% des clients ayant choisi de se rendre à Marrakech sont satisfaits de leur voyage, donc $P_M(S)=\frac{9}{10}$.

1.



2. a) L'événement $A \cap S$ est : « le client a choisi de se rendre à Agadir et est satisfait de son voyage ». $P(A \cap S)=P(A) \times P_A(S)=0{,}5 \times 0{,}6=0{,}3=\frac{3}{10}$.

b) L'enquête montre aussi que :

- 72% des clients de l'agence sont satisfaits, donc $P(S)=0{,}72=\frac{72}{100}$.
- 24% des clients ont choisi de se rendre à Fès et sont revenus satisfaits de leur voyage, donc $P(F \cap S)=0{,}24=\frac{24}{100}$.

D'après la loi des probabilités totales, $P(S)=P(S \cap A)+P(S \cap F)+P(S \cap M)$, donc $P(M \cap S)=P(S)-[P(A \cap S)+P(F \cap S)]=0{,}72-(0{,}3+0{,}24)=0{,}18=\frac{18}{100}$.

La probabilité que le questionnaire choisi soit celui d'un client ayant choisi Marrakech comme destination et revienne satisfait de son voyage est donc de $\frac{18}{100}$.

c) $P(M)=\frac{P(M \cap S)}{P_M(S)}=\frac{0{,}18}{0{,}9}=\frac{2}{10}$. La proportion de clients ayant choisi de se rendre à Marrakech est de $\frac{2}{10}$.

Comme $P(F)=\frac{3}{10}$ et $P(F \cap S)=\frac{24}{100}$, alors $P_F(S)=\frac{P(F \cap S)}{P(F)}=\frac{\frac{24}{100}}{\frac{3}{10}}=\frac{8}{10}$.

Ex 4 :

Partie A

1. On reconnaît un schéma de Bernoulli consistant en la répétition 3 fois de manière indépendante de l'épreuve de Bernoulli de succès de probabilité $\frac{2}{5}$.

La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètre 3 et $\frac{2}{5}$.

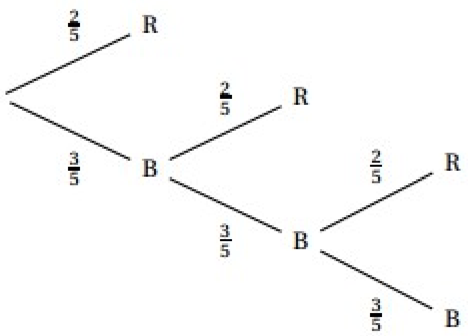
2. $P(X=1)=\frac{54}{125}$

$P(X=1) < 0{,}5$ … il est donc clair que le professeur corrigera son paquet un peu plus tard !

3. $E(X)=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$

Sur 1000 tirages, ce qui représente un nombre suffisamment grand, il tirera environ 1200 stylos rouges.

Partie B



2.a. $Y(\Omega)=\{0;1\}$

b. D'après l'arbre, on a :

$$P(Y=1)=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{98}{125}$$

$$P(Y=0)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{27}{125}$$

$$E(Y)=1\times\frac{98}{125}+0\times\frac{27}{125}=\frac{98}{125}$$

3.

a. $N(\Omega)=\{1;2;3\}$

b. D'après l'arbre, on a :

$P(N=1)=\frac{2}{5}$; $P(N=2)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$ et $P(N=3)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$

$$E(N)=1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{6}{25}+3\times\frac{9}{25}=\frac{49}{25}$$

4. On a $\frac{E(Y)}{E(N)}=...=\frac{2}{5}$, ce qui correspond à la proportion de stylos rouges dans la trousse.