TS7 **Devoir Surveillé n ° 1**

- Durée 1 h
- Calculatrices autorisées

Barème :	**Nom :**
1) 14 pts **2)** 6 pts	

Commentaires : *Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées . Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage …*

Ex 1 : *(D'après Bac : métropole, juin 2012)*

Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.

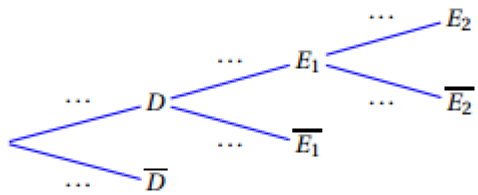
On considère les évènements suivants :

— D : « Le candidat est retenu sur dossier »,

— E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,

— E_2 : « Le candidat est recruté ».

a. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b. Calculer la probabilité de l'évènement E_1.

c. On note F l'évènement « Le candidat n'est pas recruté ».
Démontrer que la probabilité de l'évènement F est égale à 0,93.

2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à 0,07.

On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

a. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

b. Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}.

3. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à 0,999 ?

Ex 2 :

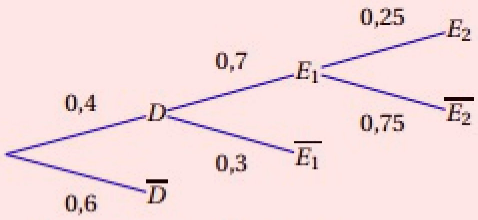
On considère une suite (u_n) telle que pour tout $n \geqslant 5$, $u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4} u_n$.

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$

Correction :

Ex 1 :

1. a.



b. On a $p(E_1) = p(D \cap E_1) = p(D) \times p_D(E_1) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$.

c. Calculons la probabilité de ne pas être recruté, soit :

$p(F) = p\left(\overline{D}\right) + p\left(D \cap \overline{E_1}\right) + p\left(D \cap E_1 \cap \overline{E_2}\right) = 0,6 + 0,4 \times 0,3 + 0,4 \times 0,7 \times 0,75 = 0,6 + 0,12 + 0,21 =$ 0,93. D'où $p\left(\overline{F}\right) = 1 - p(F) = 1 - 0,93 = 0,07$.

On peut directement calculer la probabilité d'être recruté, soit :

$p\left(\overline{F}\right) = p(D \cap E_1 \cap E_2) = 0,4 \times 0,7 \times 0,25 = 0,07$.

D'où $p(F) = 1 - p\left(\overline{F}\right) = 1 - 0,07 = 0,93$.

2. a.
On reconnaît un schéma de Bernoulli consistant en la répétition 5 fois de manière indépendante de l'épreuve de Bernoulli de succès de probabilité 0,07.
La variable aléatoire X comptant le nombre de personnes recrutées suit donc la loi binomiale de paramètre 5 et 0,07.

b. P(X=2) ≈ 0,039 à 10^{-3} près

3. On reprend ici la loi binomiale mais avec n candidats chacun ayant une probabilité d'être recruté égale à 0,07.
La variable aléatoire X_n comptant le nombre de personnes recrutées suit donc la loi binomiale de paramètre n et 0,07.

La probabilité qu'aucun ne soit retenu est égale à : $\binom{n}{0} \times 0,07^0 \times 0,93^n = 0,93^n$.

La probabilité qu'un au moins des n candidats soit recruté est donc égale à $1 - 0,93^n$.
Il faut donc résoudre l'inéquation : $1 - 0,93^n > 0,999$
Ne connaissant pas encore la fonction ln , on peut résoudre cette inéquation en déterminant les termes consécutifs de la suite croissante $u_n = 1 - 0,93^n$. Ce qui est facile à faire avec la calculatrice !
Ci-dessous, un extrait des calculs faits avec un tableur :

91	0,9986449718
92	0,9987398238
93	0,9988280362
94	0,9989100736
95	0,9989863685
96	0,9990573227
97	0,9991233101
98	0,9991846784
99	0,9992417509

Il faut donc traiter au moins 96 dossiers pour avoir une probabilité supérieure à 0,999 de recruter au moins un candidat.

Ex 2 :

On considère une suite (u_n) telle que pour tout $n \geqslant 5$, $u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4} u_n$.

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$

Soit $P(n)$: « $u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$ » pour $n \geqslant 5$

Initialisation :

$u_5 \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{5-5} u_5$

$P(5)$ est vrai

Hérédité :

Supposons que $P(n)$ soit vraie pour n fixé $(n \geqslant 5)$

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire $u_{n+1} \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4} u_5$

On a vu que : $u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4} u_n$

On a donc $u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5 \Leftrightarrow u_{n+1} \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-4} u_5$

$P(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion :

Par récurrence, on en déduit que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5$