

Temp

Devoir n° 6

- Durée 1 h
- Calculatrices autorisées



Barème :

1) 7 pts 2) 5 pts 3) 3 pts 4) 5 pts

Nom :



Ex 1 : On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$
On considère l'équation (E) $z^2 - 10z + c = 0$ où c est un réel.

1) Pour quelles valeurs de c , l'équation (E) admet-elle deux solutions complexes ?

2) Déterminer ces deux solutions que l'on note z_A et z_B .

3) On considère les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B .

a) Justifier que le triangle OAB est isocèle en O.

b) En calculant $\frac{z_B}{z_A}$, déterminer la (ou les) valeur(s) de c tel (tels) que OAB soit rectangle en O.

c) Déterminer la (ou les) valeur(s) de c tel (tels) que OAB soit équilatéral ?

Ex 2 :

1) Soit $\omega \in U_{17}$ tel que $\omega \neq 1$. Montrer que $\omega^k \in U_{17}$ pour tout $k \in [0, 1, \dots, 16]$

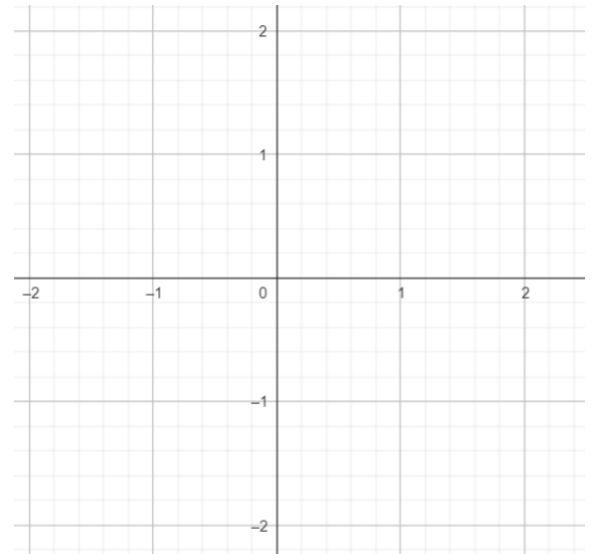
On admet la réciproque, ce qui signifie que l'ensemble U_{17} est constitué des complexes ω^k avec $k \in \{0, 1, \dots, 16\}$ où ω est un élément quelconque de U_{17}

2) Calculer la somme des éléments de U_{17} .

Ex 3 : Soit le point A(-5) et f la fonction qui à tout point M (différent de A) d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{\bar{z}(z-5)}{\bar{z}+5}$.
Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

Ex 4 :

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-1+i)^6=1$



b) Représenter dans le plan complexe les points images des solutions.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+5)^7=(3-i)^7$



correction :

Ex 1 :

1,5 pt 1) $\Delta = 100 - 4c$, $100 - 4c < 0 \Leftrightarrow 100 < 4c \Leftrightarrow c > 25$

1,5 pt 2) $z_A = \frac{10 - i\sqrt{4c-100}}{2} = 5 - i\sqrt{c-25}$ et $z_B = 5 + i\sqrt{c-25}$

1 pt 3) a) $OA = |z_A| = |z_B| = OB$

1,5 pt b) $\frac{z_B}{z_A} = \frac{\bar{z}_A}{z_A \bar{z}_A} = \frac{-c + 50 + i \times 10\sqrt{c-25}}{c} = \frac{-c+50}{c} + i \times \frac{10\sqrt{c-25}}{c}$

OAB est rectangle en O ssi $\frac{z_B}{z_A}$ est un imaginaire pur, c'est à dire pour $c=50$

1,5 pt c) $AB = |z_B - z_A| = |2i\sqrt{c-25}| = 2\sqrt{c-25}$ et $OA = \sqrt{c}$

Ainsi OAB est équilatéral ssi : (pour $c > 25$)

$$2\sqrt{c-25} = \sqrt{c} \Leftrightarrow 4(c-25) = c \Leftrightarrow 3c = 100 \Leftrightarrow c = \frac{100}{3}$$

Ex 2 :

2,5 pt 1) Il existe $p \in \{1, 2, \dots, 16\}$, tel que $\omega = e^{i\frac{2p\pi}{17}}$

Soit $k \in \{0, 1, \dots, 16\}$. On a $\omega^k = \left(e^{i\frac{2p\pi}{17}}\right)^k = e^{i\frac{2(pk)\pi}{17}}$

On effectue la division euclidienne de pk par 17.

On peut donc écrire :

$$pk = 17q + r \text{ où } q \in \mathbb{N} \text{ et } r \in \{0, 1, \dots, 16\}$$

Ainsi $\omega^k = e^{i\frac{2(17q+r)\pi}{17}} = e^{i\left(2q\pi + \frac{2r\pi}{17}\right)} = e^{i\left(\frac{2r\pi}{17}\right)} \text{ où } r \in \{0, 1, \dots, 16\}$

Ainsi $\omega^k \in U_{17}$

2,5 pt 2) Soit $\omega \in U_{17}$ tel que $\omega \neq 1$. On vient de voir que U_{17} est constitué des complexes ω^k avec $k \in \{0, 1, \dots, 16\}$ où ω est un élément quelconque U_{17} de .

$$\sum_{k=0}^{16} \omega^k = \frac{1 - \omega^{17}}{1 - \omega} \text{ (somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison } \omega \text{ et de premier terme 1)}$$

Or $\omega \in U_{17}$ donc $\omega^{17} = 1$ et $\sum_{k=0}^{16} \omega^k = 0$

Ex 3 :

2 pt $z' = z \Leftrightarrow \frac{\bar{z}(z-5)}{\bar{z}+5} = z \Leftrightarrow \bar{z}(z-5) = z(\bar{z}+5) \Leftrightarrow \bar{z}z - 5\bar{z} = z\bar{z} + 5z \Leftrightarrow -5\bar{z} = 5z \Leftrightarrow z = -\bar{z} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$

1 pt L'ensemble des points invariants par f est donc l'axe des ordonnées.

Ex 4 :

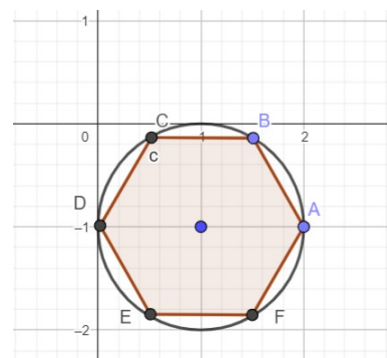
1) On pose $Z = z - i$.

On sait que les solutions de $Z^6 = 1$ sont les complexes :

$$Z = e^{i\frac{k\pi}{3}} \text{ où } k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

On en déduit que les solutions de $(z-1+i)^6 = 1$ sont les complexes

1,5 pt $z = 1 - i + e^{i\frac{k\pi}{3}} \text{ où } k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$



1,5 pt

2 pt 2) $(z+5)^7=(3-i)^7 \Leftrightarrow \left(\frac{z+5}{3-i}\right)^7=1$

On pose $Z=\frac{z+5}{3-i}$.

On sait que les solutions de $Z^7=1$ sont les complexes :

$$Z=e^{i\frac{2k\pi}{7}} \text{ où } k\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$$

On en déduit que les solutions de $(z+5)^7=(3-i)^7$ sont les complexes

$$z=-5+(3-i)e^{i\frac{2k\pi}{7}} \text{ où } k\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$$