Texp **Devoir n ° 5**

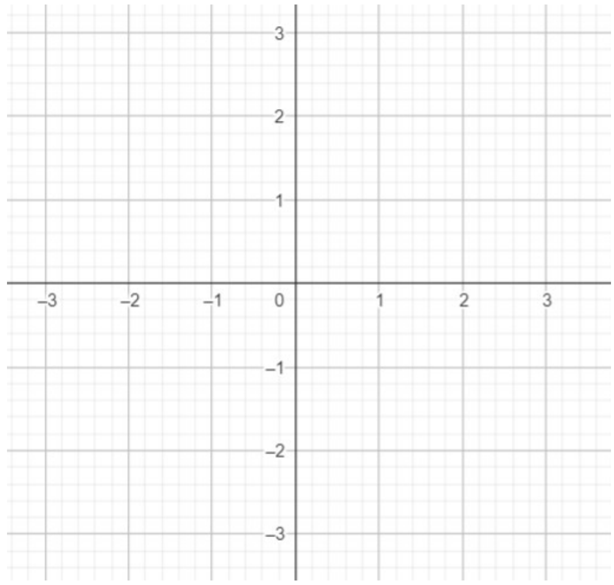
- Durée 1 h
- Calculatrices autorisées

Barème :	**Nom :**
1) 7 pts **2)** 6 pts **3)** 6 pts **4)** 4 pts	

Dans tout le devoir, on se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Ex 1 : Soit A, B et C les points d'affixes $a=\sqrt{3}+i$, $b=ia$ et $c=ib$

1) a) Démontrer que A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.



b) Ecrire b et c sous forme algébrique.

c) Que peut-on dire des points A et C ?

d) Placer précisément ces trois points dans le plan complexe.

2) a) Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Démontrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en B

c) Déterminer l'affixe de D tel que ABCD soit un carré.

<u>Ex 2 :</u> Dans chacun des cas, déterminer géométriquement l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie

1) $|z^2-6-4i|=i^7$

2) $|z|=|z-5-2i|$

3) $|2iz-2|=8$

<u>Ex 3 :</u> 1) En posant $z=x+iy$, écrire $(\bar{z}-3i)(2+2z)$ sous forme algébrique.

2) Déterminer dans chacun des cas l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

1) $(\bar{z}-3i)(2+2z) \in i\mathbb{R}$

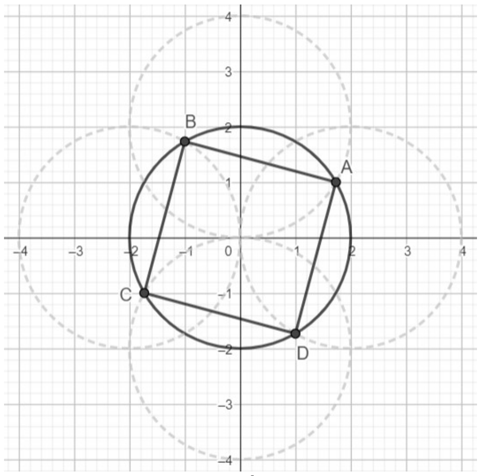
2) $(\bar{z}-3i)(2+2z) \in \mathbb{R}$

Ex 4 : Écrire les nombres complexes ci-dessous sous forme trigonométrique.

1) $z_1=-15\sqrt{3}+45i$

2) $z_2=i\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

Correction :



Ex 1 : 1) a) $|a|=|\sqrt{3}+i|=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=2$, $|b|=|ia|=|i||a|=1\times2=2$ et $|c|=|ib|\equiv|i||b|=1\times2=2$

Donc A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2

b) $b=-1+i\sqrt{3}$ et $c=-\sqrt{3}-i$

c) $c=-a$, donc A et C sont symétriques par rapport au point O.

d)

2) a) $z_{\overrightarrow{AB}}=b-a=-1-\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)$ $z_{\overrightarrow{BC}}=c-b=1-\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})$ $z_{\overrightarrow{AC}}=c-a=-2\sqrt{3}-2i$

b) $\mathrm{AB}=|b-a|=2\sqrt{2}$, $\mathrm{BC}=|c-b|=2\sqrt{2}$ et $\mathrm{AC}=|c-a|=4$

$\mathrm{AC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore ABC est rectangle en B et comme AB=BC, il est aussi isocèle en B.

c) ABCD est un carré de centre O milieu de [AC], donc D est le symétrique de B par rapport à O et D a pour affixe $-b=1-i\sqrt{3}$

Ex 2 :

1) $|z^2-6-4i|=i^7 \Leftrightarrow |z^2-6-4i|=-i$

Ce qui est impossible. L'ensemble cherché est donc vide

2) $|z|=|z-5-2i| \Leftrightarrow |z|=|z-(5+2i)| \Leftrightarrow$ OM=CM où O est l'origine du repère et $\mathrm{C}(5+2i)$

L'ensemble cherché est donc la médiatrice du segment $[\mathrm{OC}]$

3) $|2iz-2|=8 \Leftrightarrow |2i(z+i)|=8 \Leftrightarrow |2i||z+i|=8 \Leftrightarrow |z+i|=4 \Leftrightarrow$ AM=4 où $\mathrm{A}(-i)$

L'ensemble cherché est donc le cercle de de centre A et de rayon 4.

Ex 3 :

1) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$(\bar{z}-3i)(2+2z) =\dots= 2x^2+2x+2y^2+6y+(-6x-2y-6)i$

$(\mathrm{conj}(z)-3\cdot i)\cdot(1+z)$

$x^2+x+y^2+3\cdot y+(-3\cdot x-y-3)\cdot i$

2) a)Ainsi : $(\bar{z}-3i)(1+z) \in i\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow 2x^2+2x+2y^2+6y=0\\&\Leftrightarrow x^2+x+y^2+3y=0\\&\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}=0\\&\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

L'ensemble cherché est le cercle de centre $\mathrm{A}\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{10}}{2}$

b) $(\bar{z}-3i)(1+z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -6x-2y-6=0 \Leftrightarrow -3x-y-3=0 \Leftrightarrow y=-3x-3$

L'ensemble cherché est la droite d'équation $y=-3x-3$

Ex 4 :

1) $|z_1|=\dots=30\sqrt{3}$ et $z_1=30\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=30\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

2) $z_2=i\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=i\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$

$|z_2|=1$ et $\arg(z_1)=\arg(i)-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$

Donc $z_2=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$