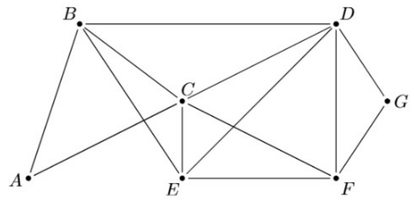
Texp **Cadeau de fin d'année n° 9**	**Barème :** **1)** 3 pts **2)** 4 pts **3)** 5 pts **4)** 6 pts **5)** 2 pts	**Nom :**

- Durée 1 h
- Calculatrices autorisées

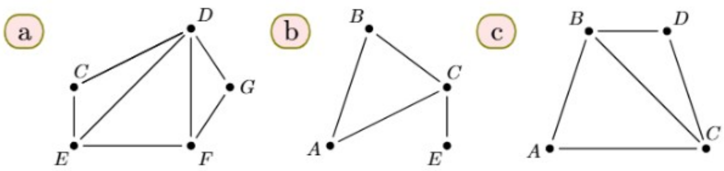
Répondre sur cette feuille

EX 1 :

1) On considère le graphe ci-contre :

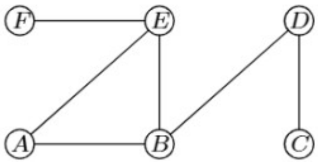


Parmi les graphes ci-contre, lesquels sont des sous-graphes du graphe principal :

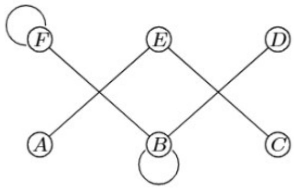


2) Indiquer si les graphes ci-dessous sont conr

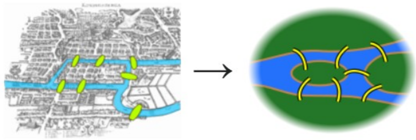
a)



b)



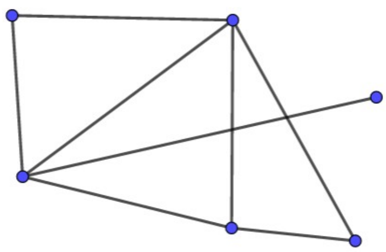
EX 2 : La ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) est construite autour de deux îles situées sur le Pregel et reliées entre elles par un pont. Six autres ponts relient les rives de la rivière à l'une ou l'autre des deux îles, comme représentés sur le plan ci-dessus. Le problème consiste à déterminer s'il existe ou non une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, et de revenir à son point de départ, étant entendu qu'on ne peut traverser le Pregel qu'en passant sur les ponts.



1) Dessiner un graphe représentant la situation.

2) Est-il possible de se promener dans les rues de Königsberg en passant une et une seule fois par chaque pont ?

Ex 3 : 1) Déterminer les sommets A,B,C,D,E et F du graphe ci dessous, sachant que la matrice d'adjacence associée, en prenant les sommets par ordre alphabétique est : $M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



2) Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 reliant A à C et le nombre de chaînes de longueur 5 reliant C à E.

<u>Ex 4 :</u> Un chimpanzé saute aléatoirement plusieurs fois par heure sur trois arbres . A chaque étape :
- Si il est sur l'arbre A, il choisit de manière équiprobable, soit de rester en A, soit de sauter vers l'arbre B ou vers l'arbre C.
- Si il est sur l'arbre B, il choisit de manière équiprobable de sauter sur l'arbre A ou sur l'arbre C.
- Si il est sur l'arbre C, il saute sur l'arbre A.

On note X_n la variable aléatoire donnant la position du chimpanzé à l'étape n .
Au début, pour $n=0$, Le chimpanzé est sur l'arbre B.
1) Donner la distribution initiale du système.

2) En utilisant un arbre pondéré, donner la distribution du système après deux étapes.

3) Expliquer pourquoi la suite (X_n) est une chaîne de Markov et donner le graphe probabiliste et la matrice associée.

4) Quelle est la probabilité que le chimpanzé se retrouve à nouveau sur l'arbre B au bout de 5 étapes ?

5) Le chimpanzé (de compétition) , saute sans jamais s'arrêter . Conjecturer grâce à la calculatrice, la probabilité qu'il soit sur l'arbre A au bout d'une semaine ?

<u>Ex 5 :</u> Citer le théorème d'Euler

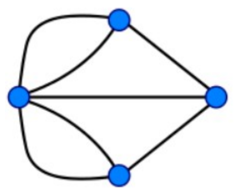
Correction :

Ex 1 :

1) **c** 2) a) oui
b) non : il n'existe pas de chaîne reliant le sommet F avec le sommet E

Ex 2 :

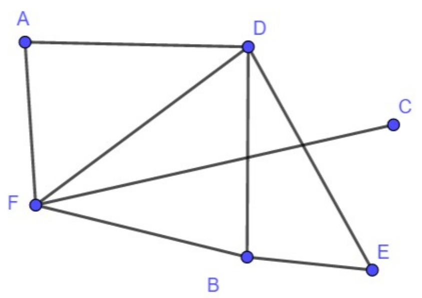
1)



2) Le graphe est connexe et possède quatre sommets de degré impair.
Le graphe ne possède donc pas de chaîne eulérienne.
Il est donc impossible de se promener dans les rues de Königsberg en passant une et une seule fois par chaque pont .

Ex 3 :

1)



2)

Define $a=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0&1\\1&1&0&0&1&1\\0&1&0&1&0&0\\1&1&1&1&0&0\end{bmatrix}$ *Terminé*

a^3 $\begin{bmatrix}2&3&1&6&3&6\\3&4&1&7&5&8\\1&1&0&2&2&4\\6&7&2&6&6&8\\3&5&2&6&2&3\\6&8&4&8&3&4\end{bmatrix}$

a^5 $\begin{bmatrix}26&35&12&48&29&47\\35&46&15&61&40&63\\12&15&4&21&16&26\\48&61&21&68&47&69\\29&40&16&47&24&36\\47&63&26&69&36&52\end{bmatrix}$

3) Nombre de chaînes de longueur 3 reliant A à C : 1 (A-D-F-C)

Nombre de chaînes de longueur 5 reliant C à E : 16

Ex 4 :

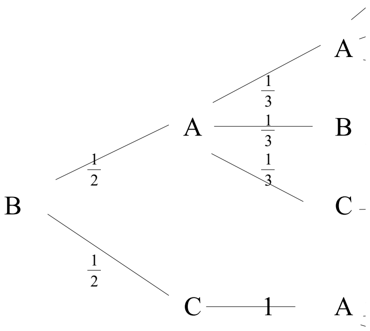
1) $P(X_0=A)=0$, $P(X_0=B)=1$ et $P(X_0=C)=0$

2) D'après la formule des probabilités totales ….

$$P(X_2=A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

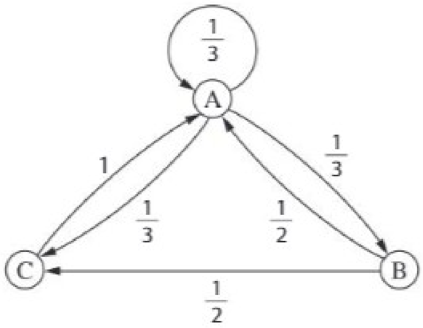
$$P(X_2=B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$P(X_2=C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$



3) A chaque étape, la probabilité que le chimpanzé saute d'un arbre à l'autre ne dépend pas de n . Donc la suite (X_n) est bien une chaîne de Markov.

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



4)

Define $p=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *Terminé*

p^5 $\begin{bmatrix} \frac{535}{972} & \frac{175}{972} & \frac{131}{486} \\ \frac{349}{648} & \frac{31}{162} & \frac{175}{648} \\ \frac{175}{324} & \frac{29}{162} & \frac{91}{324} \end{bmatrix}$

p^5 $\begin{bmatrix} 0.550411522634 & 0.180041152263 & 0.269547325103 \\ 0.538580246914 & 0.191358024691 & 0.270061728395 \\ 0.54012345679 & 0.179012345679 & 0.280864197531 \end{bmatrix}$

la probabilité que le chimpanzé se retrouve à nouveau sur l'arbre B au bout de 5 étapes est d'environ 0,19.

5) On trouve environ 0,545

<u>Ex 5 :</u>

Dans la cas d'un graphe non-orienté, un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair vaut 0 ou 2.