

D'après Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie novembre 2017

Dans un territoire donné, on s'intéresse à l'évolution couplée de deux espèces : les buses (les prédateurs) et les campagnols (les proies).

Des scientifiques modélisent, pour tout entier naturel n , cette évolution par :

$$\begin{cases} b_0 = 1000 \\ c_0 = 1500 \\ b_{n+1} = 0,3 b_n + 0,5 c_n \\ c_{n+1} = -0,5 b_n + 1,3 c_n \end{cases}$$

où b_n représente approximativement le nombre de buses et c_n le nombre approximatif de campagnols le 1er juin de l'année $2000+n$ (où n désigne un entier naturel).

1) On note A la matrice $\begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 \\ -0,5 & 1,3 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n , U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

a) Calculer U_1 et U_2 .



b) En utilisant la matrice A, exprimer pour tout entier naturel n , U_{n+1} en fonction de U_n ?

On donne les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) On admet que P a pour inverse une matrice Q de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

a) Déterminer la valeur de a en justifiant.



b) On admet que $A = PTQ$. Démontrer que, pour tout entier n non nul, on a $A^n = P T^n Q$.

c) Démontrer que, pour tout entier n non nul, $T^n = \begin{pmatrix} 0,8^n & 0,5n0,8^{n-1} \\ 0 & 0,8^n \end{pmatrix}$

3) Lucie exécute l’algorithme ci-dessous et obtient en sortie $n=40$. Quelle conclusion Lucie peut-elle énoncer pour les buses et les campagnols ?

```
n=0
B=1000
C=1500
while B>2 or C>2:
    n=n+1
    R=B
    B=0.3*R+0.5*C
    C=-0.5*R+1.3*C
print(n)
```

4) On admet que, pour tout entier naturel n non nul, on a $U_n = \begin{pmatrix} 1000 \times 0,8^n + \frac{625}{2} n 0,8^n \\ 1500 \times 0,8^n + \frac{625}{2} n 0,8^n \end{pmatrix}$ et $n \leq 10 \times 1,1^n$

a) En déduire les limites des suites (b_n) et (c_n) .

b) Des mesures effectuées dans des territoires comparables montrent que la population de campagnols reste toujours supérieure à au moins 50 individus. À la lumière de ces informations, le modèle proposé dans l’exercice vous paraît-il cohérent ?

Correction :

https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_S_Nlle_Caledonie_28_nov_2017.pdf