

Répondre sur cette feuille

Le but de cet exercice est d'envisager plusieurs décompositions arithmétiques du nombre 40.

Partie A : Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes

1) 1 pts Sans justifier, donner deux nombres premiers x , et y tels que $40 = x + y$.

2) 3 pts On considère l'équation $20x + 19y = 40$, où x et y désignent deux entiers relatifs. Résoudre cette équation.



3) Le nombre 40 est une somme de deux carrés puisque : $40 = 2^2 + 6^2$. On veut savoir si 40, est aussi différence de deux carrés, autrement dit s'intéresser à l'équation $x^2 - y^2 = 40$, où x et y désignent deux entiers naturels.

a) 1 pts Donner la décomposition de 40 en produit de facteurs premiers.

b) 3 pts Montrer que, si x et y désignent des entiers naturels, les nombres $x - y$ et $x + y$ ont la même parité.



c) 3 pts Déterminer toutes les solutions de l'équation $x^2 - y^2 = 40$, où x et y désignent deux entiers naturels.

Partie B : « sommes » de cubes . Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Certains nombres entiers peuvent se décomposer en somme ou différence de cubes d'entiers naturels. Par exemple :

$$13 = 4^3 + 7^3 + 7^3 - 9^3 - 2^3 \quad ; \quad 13 = -1^3 - 1^3 - 1^3 + 2^3 + 2^3 \quad ; \quad 13 = 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3$$

Dans tout ce qui suit, on écrira pour simplifier « sommes » de cubes à la place de « sommes ou différence de cubes d'entiers naturels ».

Les deux premiers exemples montrent que 13 peut se décomposer en « somme » de 5 cubes.

Le troisième exemple montre que 13 peut se décomposer en « somme » de 4 cubes.

1) a) 2 pts En utilisant l'égalité $13 = 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3$, donner une décomposition de 40 en « somme » de 5 cubes.



b) 2 pts On admet que pour tout entier naturel n on a : $6n = (n+1)^3 + (n-1)^3 - n^3 - n^3$

En déduire une décomposition de 48 en « somme » de 4 cubes, puis une décomposition de 40 en « somme » de 5 cubes, différente de celle donnée en 1) a)

2) Le nombre 40 est une « somme » de 4 cubes : $40 = 4^3 - 2^3 - 2^3 - 2^3$. On veut savoir si 40 peut être décomposé en « somme » de 3 cubes.

a) 3 pts Compléter sans justifier :

$n[9]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n^3[9]$									

b) 2 pts Prouver que 40 ne peut pas être décomposé en « somme » de 3 cubes.

Correction

https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_S_Etranger_13-06_2019_JPG.pdf