Texp **Devoir n ° 6** **Barème :** **Nom :**

1) 5 pts **2)** 5 pts **3)** 4 pts **4)** 6 pts

- Durée 1 h
- Calculatrices autorisées

Répondre sur cette feuille

Ex 1 : 1) Déterminer une combinaison linéaire de $3n+3$ et $7n+4$ donnant un résultat constant.

2) En déduire les entiers relatifs n tels que $3n+3$ divise $7n+4$.

Ex 2 : 1) Montrer que l'équation $700x-49y=1401$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{Z}^2$.

2) a) Trouver un couple d'entiers tel que $27x-20y=1$

b) En déduire un point de coordonnées entières appartenant à la droite d'équation $y=-\frac{27}{20}x+\frac{17}{20}$

Ex 3 : 1) a) Quelle formule a-t-on saisie en B1, puis tirée vers le bas pour avoir les puissances de 7 dans la colonne B ?

	A	B	C
1	1	7	7
2	2	49	5
3	3	343	2
4	4	2401	3
5	5	16807	10
6	6	117649	4
7	7	823543	6
8	8	5764801	9
9	9	40353607	8
10	10	282475249	1
11	11	1977326743	7
12	12	13841287201	5
13	13	96889010407	2

b) Dans un tableur, mod(12,5) retourne le reste de la division euclidienne de 12 par 5.

Quelle formule a-t-on saisie en C1, puis tirée vers le bas pour avoir les restes de la division euclidienne par 11 des entiers de la colonne B ?

2) En déduire, le reste de la division euclidienne de 4374^{333} par 11.

Ex 4 : 1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation $6x \equiv 5[13]$

2) Montrer que $N = n(5n-1)(2n+7)$ est divisible par 6 pour tout entier naturel.

3) On considère dans $\mathbb{Z}^3$: $3x^2 + 5y^3 - 15z^2 = 26$ (E)

a) Montrer que si un triplet $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ est solution de l'équation (E), alors $3x^2 \equiv 1[5]$.

b) Déterminer les restes de la division de $3x^2$ par 5 et conclure.

correction :

Ex 1 : 1) $7\times(3n+3)-3\times(7n+4)=9$

2) Si $3n+3$ divise $7n+4$ alors $3n+3$ divise toute combinaison linéaire de $3n+3$ et de $7n+4$.
En particulier $3n+3$ divise $7\times(3n+3)-3\times(7n+4)=9$

Les diviseurs de 9 sont -1, 1, -3, 3, -9 et 9

Ainsi $3n+3=-1$ ou $3n+3=1$ ou $3n+3=-3$ ou $3n+3=3$ ou $3n+3=-9$ ou $3n+3=9$

On en déduit que : $n=-\frac{4}{3}$ ou $n=-\frac{2}{3}$ ou $n=-2$ ou $n=0$ ou $n=-4$ ou $n=2$

$n=-\frac{4}{3}$ ou $n=-\frac{2}{3}$ ne sont pas des entiers, nous pouvons donc les exclure.

Réciproquement :

si $n=-2$ alors $3n+3=-3$ et $7n+4=-10$: NON

si $n=0$ alors $3n+3=3$ et $7n+4=4$: NON

si $n=-4$ alors $3n+3=-9$ et $7n+4=-24$: NON

si $n=2$ alors $3n+3=9$ et $7n+4=18$: OUI

$3n+3$ divise $7n+4$ uniquement pour $n=2$

Ex 2 :

1) Supposons qu'il existe un couple d'entiers relatifs tel que $700x-49y=1401$.
7 divisant 700 et 49, il divise donc aussi $700x-49y$. Il devrait donc diviser 1401, ce qui est absurde.
L'équation n'a donc pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

2) a) $27\times3-20\times4=1$ =1 donc (3,4) répond au problème. $27\times3-20\times4=1$

b) $y=-\frac{27}{20}x+\frac{17}{20} \Leftrightarrow 20y=-27x+17 \Leftrightarrow 27x+20y=17 \Leftrightarrow 27x-20(-y)=17$

Ainsi le point A(51,-68) répond au problème.

Ex 3 :

1) a) =7^A1 b) =MOD(B1;11)

2) On a $4374=11\times397+7$

Ainsi $4374\equiv7[11]$, donc $4374^{333}\equiv7^{333}[11]$

Par ailleurs $7^{10}\equiv1[11]$ et $333=33\times10+3$

Ainsi $7^{333}=7^{10\times33+3}=(7^{10})^{33}\times7^3$

Or $7^{10}\equiv1[11]$, donc $(7^{10})^{33}\equiv1[11]$

Ainsi $4374^{333}\equiv7^3\equiv2[11]$

Comme $0\leqslant2<11$, 2 est le reste de la division euclidienne de 4374^{333} par 11.

Ex 4 :

1)
$6x\equiv5[13] \Rightarrow 11\times6x\equiv11\times5[13] \Rightarrow 66x\equiv55[13]$
Or $66\equiv1[13]$ et $55\equiv3[13] \Rightarrow x\equiv3[13]$

Réciproque :

$x \equiv 3[13] \quad \Rightarrow \quad 6x \equiv 18[13] \quad \Rightarrow \quad 6x \equiv 5[13]$

On a donc : $6x \equiv 5[13] \quad \Leftrightarrow \quad 6x \equiv 5[13]$

Les solutions sont donc les entiers de la forme $x = 3 + 13k$ (où $k \in \mathbb{Z}$)

2)

$n[6]$	0	1	2	3	4	5
$5n-1[6]$	-1	4	3	2	1	0
$2n+7[6]$	1	3	-1	1	3	-1
N [6]	0	12 ≡ 0	-6 ≡ 0	6 ≡ 0	12 ≡ 0	0

Cette étude exhaustive nous permet de conclure $\mathrm{N} \equiv 0[6]$.

3)

On a : $5 \equiv 0[5] \quad \Rightarrow \quad 5y^3 \equiv 0[5]$ et $15 \equiv 0[5] \quad \Rightarrow \quad 15z^2 \equiv 0[5]$. De plus $26 \equiv 1[5]$
Ainsi $3x^2 + 5y^3 - 15z^2 = 26 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 \equiv 1[5]$

Ainsi si un triplet $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ est solution de l'équation (E), on a bien:

$$3x^2 \equiv 1[5]$$

2)

$x[5]$	0	1	2	3	4
$x^2[5]$	0	1	4	4	1
$3x^2[5]$	0	3	2	2	3

Cette étude exhaustive nous permet de conclure :
On constate que $3x^2$ n'est jamais congru à 1 modulo 5, donc l'équation $3x^2 + 5y^3 - 15z^2 = 26$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^3$.