Texp **Devoir n° 5** - Durée 1 h

- Calculatrices autorisées

Barème :	**Nom :**
1) 16 pts **2)** 4 pts	

Répondre sur cette feuille

Ex 1 : D'après Baccalauréat S Antilles-Guyane 20 juin 2011

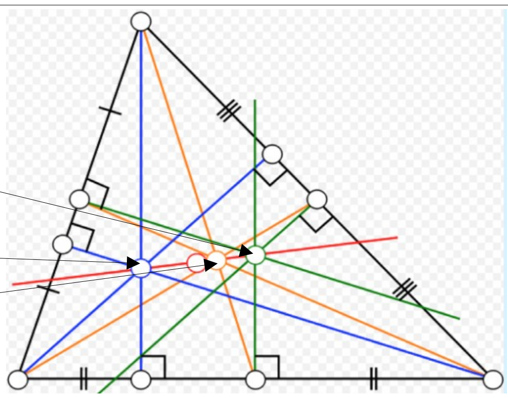
Rappel :

En géométrie, **la droite d'Euler** d'un triangle est la droite passant par :

- **Le centre du cercle circonscrit** (rencontre des médiatrices)

- **L'orthocentre** (rencontre des hauteurs)

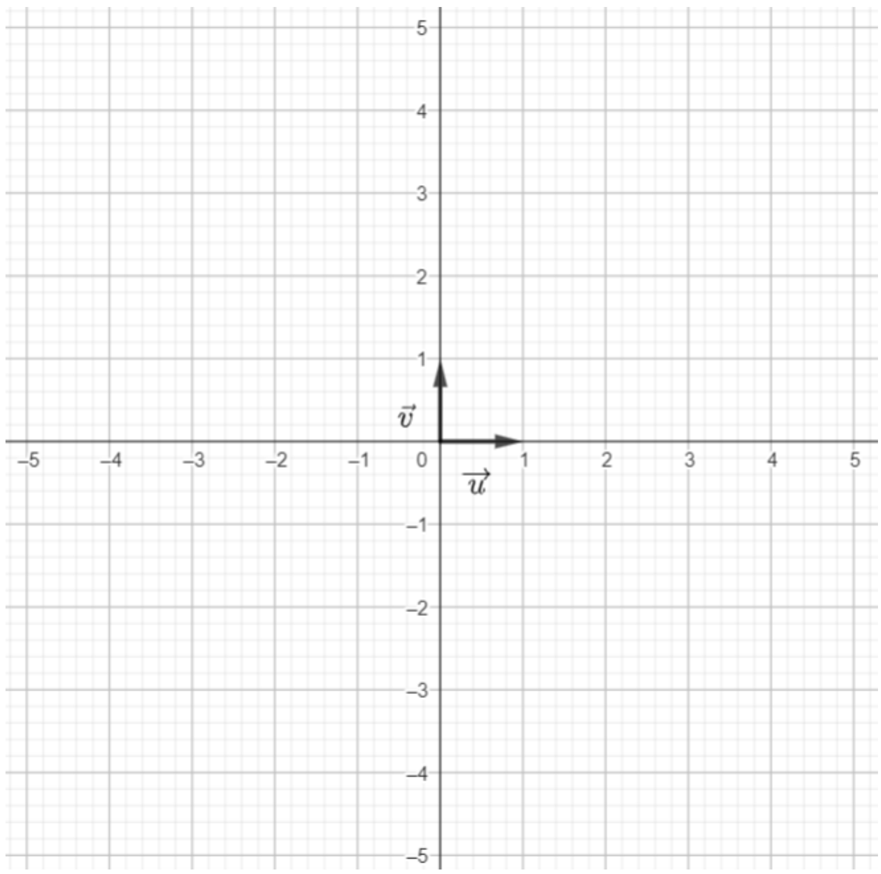
- **Le centre de gravité** (rencontre des médianes)



Le centre de gravité G d'un triangle ABC vérifie $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On appelle J le point d'affixe i .

1) On considère les points A, B, C, H d'affixes respectives $a=-3-i$, $b=-2+4i$, $c=3-i$ et $h=-2$.
Placer ces points sur une figure, qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.



2) Montrer que J est le centre du cercle C circonscrit au triangle ABC. Préciser le rayon du cercle C.

3) Calculer, sous forme algébrique, le nombre complexe $\dfrac{b-c}{h-a}$. Que peut-on en déduire pour les droites (AH) et (BC) ?

Dans la suite de l'exercice, on admet que H est l'orthocentre du triangle ABC, c'est-à-dire le point d'intersection des hauteurs du triangle ABC.

4) On note G le centre de gravité du triangle ABC. Déterminer l'affixe g du point G. Placer G sur la figure.

5) Montrer que le centre de gravité G, le centre du cercle circonscrit J et l’orthocentre H du triangle ABC sont alignés. Le vérifier sur la figure.

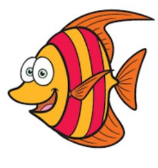
6) On note A’ le milieu de [BC] et K celui de [AH]. Le point A’ a pour affixe $a'=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

a) Déterminer l’affixe du point K.

b) Démontrer que le quadrilatère K H A′ J est un parallélogramme.

Ex 2 :

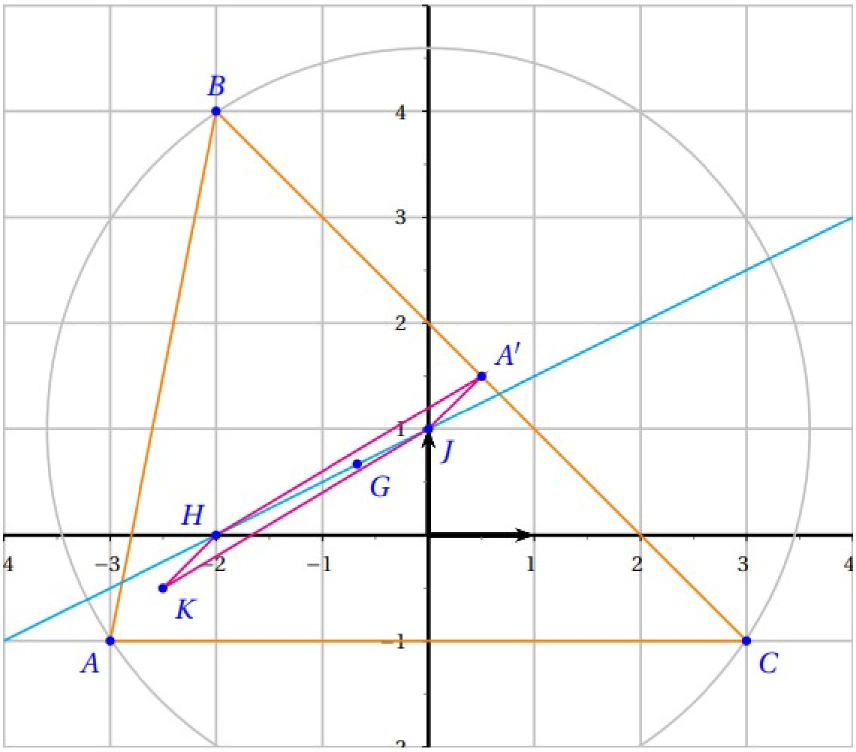
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2(z+1)^5=64(2-i)^5$ (E)



Correction :

Ex1 :

1. Figure :



2. $JA = |j-a| = |-3-2\mathrm{i}| = \sqrt{(-3)^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$. On trouve de même que $JB = \sqrt{13}$ et que $JC = \sqrt{13}$. Le cercle circonscrit au triangle ABC a donc pour centre J et pour rayon $\sqrt{13}$.

3. On a : $\dfrac{b-c}{h-a} = \dfrac{-5+5\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{(-5+5\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2} = 5\mathrm{i}$.
Par conséquent : $\left(\overrightarrow{AH}\ ;\ \overrightarrow{CB}\right) = \arg(5\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$, ce qui prouve que $(AH) \perp (BC)$.

4. G est l'isobarycentre du système $\{A\ ;\ B;\ C\}$ donc, d'après le cours :

$$g = \frac{a+b+c}{3} = \frac{-3-i-2+4\mathrm{i}+3-\mathrm{i}}{3} = -\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\mathrm{i}.$$

5. Le vecteur $\overrightarrow{HJ}$ a pour affixe $j-h = 2+\mathrm{i}$, le vecteur $\overrightarrow{JG}$ a pour affixe $g-j = -\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}\mathrm{i}$. On a donc $g-j = -\dfrac{1}{3}(j-h)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{JG} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{HJ}$. Ces deux vecteurs étant colinéaires, les points J, G et H sont donc alignés, ce qui se vérifie sur la figure.

6. **a.** Notons k l'affixe du point K, alors : $k = \dfrac{a+h}{2} = \dfrac{-3-\mathrm{i}-2}{2} = -\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

b. Le vecteur $\overrightarrow{KH}$ a pour affixe $h-k = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$ et le vecteur $\overrightarrow{JA'}$ a pour affixe $a'-j = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$. Ces deux vecteurs ayant même affixe, ils sont égaux, et le quadrilatère $KHA'J$ est donc un parallélogramme.

Ex 2 :

$$2(z+1)^5=64(2-i)^5 \quad \Leftrightarrow \quad (z+1)^5=32(2-i)^5 \quad \Leftrightarrow \quad (z+1)^5=2^5(2-i)^5 \quad \Leftrightarrow \quad (z+1)^5=(4-2i)^5 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{z+1}{4-2i}\right)^5=1$$

On pose $\mathrm{Z}=\dfrac{z+1}{4-2i}$.

On sait que les solutions de $\mathrm{Z}^5=1$ sont les complexes :

$Z=\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{5}}$ où $k\in\{0,1,2,3,4\}$

On en déduit que les solutions de l'équation (E) sont les complexes

$z=-1+(4-2i)\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{5}}$ où $k\in\{0,1,2,3,4\}$