Texp **Devoir n ° 4** - Durée 1 h - Calculatrices autorisées	**Barème :** **1)** 6 pts **2)** 7 pts **3)** 7 pts	**Nom :**

Répondre sur cette feuille

Ex 1 : Soit $P(z)=2z^4-12z^3+25z^2-21z$

1) Déterminer deux réels a et b tels que $P(z)=a(z^2-3z)^2+b(z^2-3z)$

2) Factoriser $P(z)$ dans les réels.

3) Résoudre l'équation $P(z)=0$ dans $\mathbb{C}$.

Ex 2 : Soit $P(z)=z^5-2z^4+33z^3-50z^2+200z$

1) a) Déterminer $Q(z)$ tel que $P(z)=zQ(z)$ (cadeau)

b) Trouver $k\in\mathbb{Z}$, tel que ki soit une racine de Q.

c) En déduire (sans démonstration) une autre racine de Q.

2) Justifier que Q peut être factorisé par z^2+25 dans les réels.

3) Factoriser Q dans les réels.

4) Déterminer l'ensemble des racines de P dans $\mathbb{C}$.

<u>Ex 3 :</u> 1) On considère l'équation $z^2=2+2i$ (E_1) . On pose $z=x+iy$ où x et y sont des réels.
a) Combien cette équation a-t-elle de solutions dans $\mathbb{C}$:
b) Trouver un système d'équations vérifié par x et y .

c) Ce système est-il suffisant pour déterminer x et y ? *(la réponse est évidente … étant donné les questions suivantes)* :
d) En utilisant le module, déterminer une autre équation vérifiée par x et y .

e) En déduire x^2 et y^2 , puis x et y

f) En utilisant le signe de xy , déterminer les solutions de l'équation (E_1)

2) On considère maintenant l'équation $z^4-(6+2i)z^2+8+8i=0$ (E)
a) Montrer que 2 est une solution de (E). En déduire une autre solution de (E) .

b) Développer $(z^2-4)(z^2-2-2i)$

d) En déduire toutes les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$.

correction

Ex 1 :

1) $P(z)=a(z^2-3z)^2+b(z^2-3z) = a(z^4-6z^3+9z^2)+bz^2-3bz = az^4-6az^3+(9a+b)z^2-3bz$

En identifiant avec $P(z)=2z^4-12z^3+25z^2-21z$, on obtient $\begin{cases} a=2 \\ b=7 \end{cases}$

Donc pour tout complexe z , on a : $P(z)=2(z^2-3z)^2+7(z^2-3z)$

2) Pour tout complexe z , on a :

$P(z)=2(z^2-3z)^2+7(z^2-3z)=(z^2-3z)(2z^2-6z+7)=z(z-3)(2z^2-6z+7)$

3) $P(z)=0 \Leftrightarrow z=0$ ou $z=3$ ou $z=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}i$ ou $z=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}i$ (en calculant Δ …)

Ex 2 : 1) a) $P(z)=z(z^4-2z^3+33z^2-50z+200)$. Donc $Q(z)=z^4-2z^3+33z^2-50z+200$

b) $(ki)^4-2(ki)^3+33(ki)^2-50ki+200 = k^4-33k^2+200+(2k^3-50k)i$

Pour que ki soit solution on doit avoir $2k^3-50k=0 \Leftrightarrow 2k(k^2-25)=0$

(En fait la partie réelle et la partie imaginaire doivent être nulles …, pour trouver notre résultat, il est nécessaire que la partie imaginaire s'annule donc . Ensuite, il suffit de vérifier)

$k=5$ (ou encore $k=-5$) convient (je vous laisse vérifier)

b) Comme les coefficients sont réels, on a aussi Q($\overline{5i}$)=0, c'est à dite $Q(-5i)=0$. Ou, on utilise le résultat déjà trouvé au dessus.

2) $Q(5i)=0$, donc Q est factorisable par $z-5i$.
$Q(-5i)=0$, donc Q est factorisable par $z+5i$.
Ainsi Q est factorisable par $(z-5i)(z+5i)=z^2+25$

3) On peut écrire Q sous la forme $Q(z)=(z^2+25)(z^2+az+b)$
(On sait déjà que le coefficient de z^2 du trinôme du second degré est 1, car le coefficient de z^4 de Q est 1)
Pour tout complexe z , on a :

$$(z^2+25)(z^2+az+b)=z^4+az^3+bz^2+25z^2+25az+25b$$
$$=z^4+az^3+(25+b)z^2+25az+25b$$

En identifiant avec $Q(z)=z^4-2z^3+33z^2-50z+200$, on obtient :

$$\begin{cases} a=-2 \\ 25+b=33 \\ 25a=-50 \\ 25b=200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=8 \end{cases}$$

Donc $Q(z)=(z^2+25)(z^2-2z+8)$

4) $z^2-2z+8=0 \Leftrightarrow z=1-\sqrt{7}i$ ou $z=1+\sqrt{7}i$ (facile)

Les racines de P sont donc : 0, $-5i$, $5i$, $1-\sqrt{7}i$ et $1+\sqrt{7}i$

Ex 3 : 1) a) 2

b) $(x+iy)^2=2+2i \Leftrightarrow x^2-y^2+i\times 2xy=2+2i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=2 \\ 2xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=2 \\ xy=1 \end{cases}$

c) non

d) $z^2=2+2i \Rightarrow |z^2|=|2+2i| \Rightarrow |z|^2=\sqrt{8} \Rightarrow x^2+y^2=2\sqrt{2}$

e) On a $\begin{cases} x^2-y^2=2 \\ x^2+y^2=2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=2 \\ 2x^2=2+2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=-1+\sqrt{2} \\ x^2=1+\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt{-1+\sqrt{2}}\ ou\ y=-\sqrt{-1+\sqrt{2}} \\ x=\sqrt{1+\sqrt{2}}\ ou\ x=-\sqrt{1+\sqrt{2}} \end{cases}$

f) Comme $xy>0$, on en déduit que x et y sont de même signe.

Les deux solutions de (E_1) sont donc : $z_1=\sqrt{1+\sqrt{2}}+i\sqrt{-1+\sqrt{2}}$ et $z_2=-\sqrt{1+\sqrt{2}}-i\sqrt{-1+\sqrt{2}}$

2) a) $2^4-(6+2i)2^2+8+8i=16-(6+2i)4+8+8i =16-24-8i+8+8i =0$

Les exposants sont pairs donc -2 est une autre solution.

b) $(z^2-4)(z^2-2-2i)=z^4+(-2-2i)z^2-4z^2+8+8i= z^4-(6+2i)z^2+8+8i$

c) $z^4-(6+2i)z^2+8+8i=0 \Leftrightarrow (z^2-4)(z^2-2-2i) =0 \Leftrightarrow z^2-4=0$ ou $z^2-2-2i=0$

Les solutions de (E) sont donc : -2,2, $\sqrt{1+\sqrt{2}}+i\sqrt{-1+\sqrt{2}}$ et $-\sqrt{1+\sqrt{2}}-i\sqrt{-1+\sqrt{2}}$