Texp **Devoir n ° 3**

- Durée 1 h
- Calculatrices autorisées

Barème :	**Nom :**
1) 4 pts **2)** 6 pts **3)** 6 pts 4) 4 pts	

Répondre sur cette feuille

Ex 1 : 1) Développer $(a+b)^4$.

2) En utilisant les formules d'Euler, en déduire la linéarisation de $\cos^4 x$.

3) En déduire la linéarisation de $\cos^4\left(\frac{x}{2}\right)$

Ex 2 : Soit $\mathrm{P}(z)=-z^4-8z^3+3z^2-8z+4$.

1) Démontrer que pour tout complexe z , on a : $\mathrm{P}(\bar{z})=\overline{\mathrm{P}(z)}$

2) Déterminer une racine imaginaire pure évidente de P.

3) Quelle autre racine la question 1 permet-elle de trouver ?

4) Factoriser P dans les réels, sous la forme $\mathrm{P}(z)=(z^2+1)\times \mathrm{Q}(z)$ où Q est un trinôme du second degré.

5) En déduire une meilleure forme factorisée de P .

<u>**Ex 3 :**</u> 1) Sans « balancer » le résultat de la calculatrice qui aurait tendance à m'agacer … montrer que $z=\left(\frac{15+5\sqrt{3}i}{2-2i}\right)^{12}$ est un réel.

2) Déterminer une valeur de $n \in \mathbb{Z}$ telle que $nz \in \mathbb{N}$

3) a) Sans refaire tous les calculs et en vous inspirant de la question 1), écrire $\left(\frac{15+5\sqrt{3}i}{2-2i}\right)^k$ sous forme exponentielle.

b) En déduire le plus petit entier naturel k tel que $\left(\frac{15+5\sqrt{3}i}{2-2i}\right)^k$ soit un imaginaire pur.

Ex 4 :

1) Déterminer une forme exponentielle de $a=1+e^{i\frac{8\pi}{7}}$.

2) En déduire le module et la mesure principale de l'argument de a

correction :

Ex 1 :

1) $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

2) $\cos^4 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 \quad =\frac{1}{16}\left((e^{ix})^4+4(e^{ix})^3(e^{-ix})+6(e^{ix})^2(e^{-ix})^2+4e^{ix}(e^{-ix})^3+(e^{-ix})^4\right) \quad = \quad \frac{1}{16}(e^{i4x}+4e^{i2x}+6+4e^{-i2x}+e^{-i4x})$

On a donc $\cos^4 x=\frac{1}{16}(e^{i4x}+e^{-i4x}+4(e^{i2x}+e^{-i2x})+6) \quad =\frac{1}{16}(2\cos(4x)+8\cos(2x)+6) \quad =\frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}$

3) $\cos^4\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{8}\cos(2x)+\frac{1}{2}\cos(x)+\frac{3}{8}$

Ex 2 :

1) $\overline{P(z)}=\overline{-z^4-8z^3+3z^2-8z+4}=-\overline{z}^4-\overline{8}\,\overline{z}^3+\overline{3}\,\overline{z}^2-\overline{8}\,\overline{z}+\overline{4}$
Ce qui donne $\overline{P(z)}=-\overline{z}^4-8\overline{z}^3+3\overline{z}^2-8\overline{z}+4=P(\overline{z})$

2) $P(i)=0$

3) $P(\bar{i})=\overline{P(i)}$ =0 , donc $-i$ est aussi une racine de P.

4) Ainsi P est factorisable par $(z-i)$ et $(z+i)$ donc par :

$(z-i)(z+i)=z^2+1$

On peut écrire P sous la forme $P(z)=(z^2+1)(-z^2+az+4)$

(On sait déjà que le coefficient de z^2 du trinôme du second degré est -1, car le coefficient de z^4 de P est -1, et en utilisant le même raisonnement on peut dire que le terme constant du trinôme du second degré est 4)

Pour tout complexe z , on a :

$$\begin{aligned}(z^2+1)(-z^2+az+4)&=-z^4+az^3+4z^2-z^2+az+4\\&=-z^4+az^3+3z^2+az+4\end{aligned}$$

En identifiant avec $P(z)=-z^4-8z^3+3z^2-8z+4$, on obtient $a=-8$

Donc pour tout complexe z , on a : $P(z)=(z^2+1)(-z^2-8z+4)$

5) On cherche maintenant à factoriser le trinôme Q .

On obtient facilement les racines $-4-2\sqrt{5}$ et $-4+2\sqrt{5}$ et $-z^2-8z+4=-(z-(-4-2\sqrt{5}))(z-(-4+2\sqrt{5}))$

Ce qui donne $P(z)=-(z^2+1)(z+4+2\sqrt{5})(z+4-2\sqrt{5})$

Ex 3 :

1) $\left(\frac{15+5\sqrt{3}i}{2-2i}\right)^{12}=\left(\frac{10\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^{12}=\left(\frac{5\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^{12} = \left(\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}}e^{i\frac{5\pi}{12}}\right)^{12}=\left(5\sqrt{\frac{3}{2}}e^{i\frac{5\pi}{12}}\right)^{12}$

On obtient $\left(\frac{15+5\sqrt{3}i}{2-2i}\right)^{12}=5^{12}\sqrt{\frac{3}{2}}^{12}e^{i5\pi} = -5^{12}\frac{3^6}{2^6} = \frac{-177978515625}{64} \quad \in \mathbb{R}$

2) On peut choisir $n=0$ ou il suffit de prendre $n=-64$.

3) a) on obtient $\left(\frac{15+5\sqrt{3}i}{2-2i}\right)^{k}=5^k\sqrt{\frac{3}{2}}^k e^{i\frac{5k\pi}{12}}$

b) avec $k=6$, on obtient $e^{i\frac{5\times 6\pi}{12}}=e^{i\frac{5\pi}{2}}=e^{i\frac{\pi}{2}}=i$, donc $\left(\frac{15+5\sqrt{3}i}{2-2i}\right)^{6}=5^6\sqrt{\frac{3}{2}}^6 i=\frac{421875}{8}i \quad \in i\mathbb{R}$

Ex 4 :

1) $a=1+e^{i\frac{8\pi}{7}}=e^{i\frac{4\pi}{7}}\left(e^{-i\frac{4\pi}{7}}+e^{i\frac{4\pi}{7}}\right)=e^{i\frac{4\pi}{7}}2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)=2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)e^{i\frac{4\pi}{7}}$

Or $\frac{4\pi}{7}\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$ et donc $\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)<0$

Il faut alors écrire :

$$a=-2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)e^{i\pi}e^{\frac{4\pi}{7}}=-2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)e^{i\left(\frac{4\pi}{7}+\pi\right)}=-2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)e^{i\frac{11\pi}{7}}$$

2) $|a|=-2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$ et $\arg(a)=-\frac{3\pi}{7}\quad[2\pi]$