Texp **Devoir surveillé n ° 2**

- Durée 1 h
- Calculatrices autorisées

Barème :	**Nom :**
1) 5 pts **2)** 5 pts **3)** 6 pts **4)** 4 pts	

Répondre sur cette feuille

Dans tout le devoir, on se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Ex 1 : Soit A, B et C les points d'affixes $z_A=5-i$, $z_B=4-3i$ et $z_C=-2+2i$.

1) Déterminer l'affixe du milieu M de [AC].

2) En utilisant l'affixe de M, déterminer l'affixe de D tel que ABCD soit un parallélogramme.

3) En utilisant une égalité de modules, déterminer l'affixe du point E de l'axe des ordonnées, tel que E appartienne à la médiatrice de [AB].

Ex 2 : Dans chacun des cas, déterminer géométriquement l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie

1) $|-2z+6+4i|=10$

2) $-|z-2-i|=i^2|z+5-i|$

Ex 3 : 1) En posant $z = x + iy$, écrire $(2i+\overline{z})(1-z)$ sous forme algébrique.

2) Déterminer dans chacun des cas l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

1) $(2i+\overline{z})(1-z) \in i\mathbb{R}$

2) $\dfrac{1}{(2i+\overline{z})(1-z)} \in \mathbb{R}$

Ex 4 : Écrire les nombres complexes ci-dessous sous forme trigonométrique

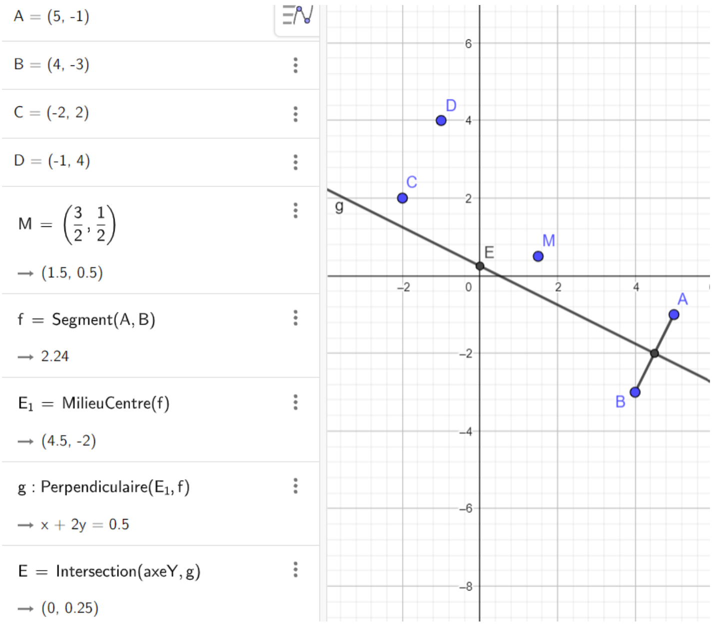
1) $z_1 = -3\sqrt{3} - 9i$

2) $z_2 = 2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Correction :

Ex 1

1) $z_M = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$



2) ABCD est un parallélogramme si et seulement si M est le milieu de [BD], c'est à dire :

$$\frac{z_B + z_D}{2} = z_M \iff \frac{4-3i+z_D}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \iff 4-3i+z_D = 3+i \iff z_D = -1+4i$$

3) (AB) n'est pas perpendiculaire à l'axe des ordonnées, donc E existe et a une affixe du type bi ou $b \in \mathbb{R}$.

E appartient à la médiatrice de [AB] ssi :

$$\begin{aligned} EA=EB &\iff |z_A - z_E| = |z_B - z_E| \\ &\iff |z_A - z_E|^2 = |z_B - z_E|^2 \\ &\iff |5+(-b-1)i|^2 = |4+(-b-3)i|^2 \\ &\iff 25+(b+1)^2 = 16+(b+3)^2 \\ &\iff 9+b^2+2b+1 = b^2+6b+9 \\ &\iff 4b = 1 \\ &\iff b = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ex 2 :

1) $|-2z+6+4i| = 10 \iff |-2(z-6-4i)| = 10 \iff 2\,|z-3-2i| = 10 \quad |z-3-2i| = 5 \iff |z-(3+2i)| = 5 \iff AM=5$ où $A(3+2i)$

L'ensemble cherché est donc le cercle de de centre A et de rayon 5.

2) $-|z-2-i| = i^2|z+5-i| \iff |z-2-i| = |z+5-i| \iff |z-(2+i)| = |z-(-5+i)| \iff BM=CM$ où $B(2+i)$ et $C(-5+i)$

L'ensemble cherché est donc la médiatrice du segment $[BC]$

Ex 3 :

1) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$(2i+\bar{z})(1-z) = \ldots = -x^2+x-y^2+2y + (-2x-y+2)i$

$$(2\cdot i + \mathrm{conj}(z))\cdot(1-z)$$
$$-x^2+x-y^2+2\cdot y+(-2\cdot x-y+2)\cdot i$$

2) a)

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } (2i+\bar{z})(1-z) \in i\mathbb{R} &\iff -x^2+x-y^2+2y = 0 \\ &\iff x^2-x+y^2-2y = 0 \\ &\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y-1)^2 - 1 = 0 \\ &\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est le cercle de centre $A\left(\frac{1}{2}+i\right)$ et rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$

b)Pour $z \neq 1$ et $z \neq 2i$, on a $\frac{1}{(2i+\bar{z})(1-z)} \in \mathbb{R} \iff (2i+\bar{z})(1-z) \in \mathbb{R} \iff -2x-y+2=0 \iff y=-2x+2$

L'ensemble cherché est la droite d'équation $y=-2x+2$ privé du point A(1) et du point B(2i)

Ex 4 :

1) $z_1 = 6\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

2) $z_2 = 2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = -2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = -2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$

$|z_2| = 2$ et $\arg(z_2) = \arg(-2) - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \quad [2\pi]$

Donc $z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$