Texp **Devoir Surveillé n ° 1**
- Durée 1h
- Calculatrices autorisées

Barème : **1)** 4 pts **2)** 5 pts **3)** 5 pts **4)** 6 pts	**Nom :**

Répondre sur cette feuille

Ex 1 : Soi z un nombre complexe non nul. On considère les nombres $Z_1 = z^3 + \overline{z}^3$ et $Z_2 = \dfrac{z^2 - \overline{z}^2}{z\overline{z} + 3}$

Déterminer si chacun de ces nombres est un nombre réel, un nombre imaginaire pur ou ni l'un ni l'autre.

Ex 2 : Soit f la fonction définie pour tout complexe z différent de $2i$ par $f(z) = \dfrac{2z}{z - 2i}$.

1) Calculer, en détaillant les calculs, l'image de i , puis celle de $1+i$. (Présenter les résultats sous forme algébrique)

2) a) Déterminer les invariants de f ?

b) On considère la transformation du plan qui au point $\mathrm{M}(a\,;b)$, associe le point $\mathrm{M}'(a',b')$ où $f(a+ib)=a'+ib'$.
Pourquoi f ne peut pas représenter une symétrie du plan ?

<u>Ex 3 :</u> Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

1) $(z+4i)^2=-8$. Que peut-on dire des deux solutions obtenues ?

2) $z^2 - \bar{z} = 2$ (aide : poser $z = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$)

<u>Ex 4 :</u>

1) Rappeler la formule du binôme de Newton :

$(a+b)^n =$

2) Dans la formule de Newton avec $(a+b)^{100}$, peut-on trouver un terme en $a^{45} b^{54}$. Si oui, quel est son coefficient ?

3) Déterminer $\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k}$

conjugué de z

4) Soit $z \in \mathbb{C}$. Justifier que $\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} \; z^k z^{100-k}$ est un réel.

Correction :

Ex 1 :

$\overline{Z_1}=\overline{z}^2+z^2=z^2+\overline{z}^2=Z_1$, donc Z_1 est un réel

$\overline{Z_2}=\dfrac{\overline{z}^2-z^2}{\overline{z}\,z+3}=-\dfrac{z^2-\overline{z}^2}{z\,\overline{z}+3}=-Z_2$, donc Z_2 est un imaginaire pur

Ex 2 :

1) $f(i)=-2$ et $f(1+i)=2i$

2) a) Pour $z\neq 2i$, on a :

$$\begin{aligned} f(z)=z &\Leftrightarrow \frac{2z}{z-2i}=z \\ &\Leftrightarrow 2z=z(z-2i) \\ &\Leftrightarrow 2z-z(z-2i)=0 \\ &\Leftrightarrow z(2-(z-2i))=0 \\ &\Leftrightarrow z(2+2i-z)=0 \\ &\Leftrightarrow z=0 \text{ ou } z=2+2i \end{aligned}$$

b) On trouve deux points invariants.
Pour une symétrie, il y a soit un unique point invariant (symétrie centrale) ou un infinité (symétrie axiale).

Ex 3 :

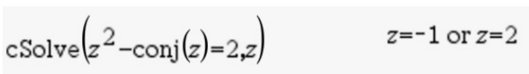
1) $(z+4i)^2=-8 \Leftrightarrow (z+4i)^2=8i^2 \Leftrightarrow z+4i=2\sqrt{2}i$ ou $z+4i=-2\sqrt{2}i \Leftrightarrow z=i(-4+2\sqrt{2})$ ou $z=i(-4-2\sqrt{2})$

Les deux solutions sont des imaginaires purs.

2)

$$\begin{aligned} z^2-\overline{z}=2 &\Leftrightarrow (x+iy)^2-(x-iy)=2 \\ &\Leftrightarrow x^2+2ixy-y^2-x+iy=2 \\ &\Leftrightarrow (x^2-y^2-x-2)+iy(2x+1)=0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2-x-2=0 \\ y(2x+1)=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2-x-2=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2-y^2-x-2=0 \\ x=\dfrac{-1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y^2=-\dfrac{5}{4} \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ (impossible car } y \in \mathbb{R}\text{)} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \, ou \, x=2 \\ y=0 \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $S=\{-1,2\}$



Ex 4 :

1) $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$

2) Non, car la somme des exposants doit être égale à 100

3) $\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}=\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}1^k 1^{100-k}=(1+1)^{100}=2^{100}$

4) $\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k} z^k \overline{z}^{100-k}=(z+\overline{z})^{100}=(2\Re e(z))^{100} \in \mathbb{R}$