Tcomp **Devoir n ° 9 - Durée 1 h**
- Calculatrices autorisées

Barème : **Ex1 :** 8 pts - **Ex2 :** 6 pts - **Ex3 :** 6 pts	**Nom :**

Répondre sur cette feuille

Ex 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases} 6x(1-x) \text{ si } x\in[0;1] \\ 0 \text{ si } x\notin[0;1] \end{cases}$

1) Montrer que f est une fonction densité d'une variable aléatoire X.

2) Calculer $\mathrm{P}\left(\mathrm{X}\geqslant\frac{1}{2}\right)$

3) Déterminer la fonction de répartition F de X.

4) Calculer $\mathrm{E}(\mathrm{X})$

Ex 2 : On choisit un nombre dans l'intervalle $]0;1[$.

1) Quelle est la probabilité que le premier chiffre après la virgule soit 2 ?

2) Quelle est la probabilité que ce nombre soit supérieur à 0,6 ?

3) Quelle est la probabilité que le premier chiffre après la virgule soit supérieur ou égal à 7 et que le second chiffre après la virgule soit 2 ?

Ex 3 : La durée de vie d'un écran LCD, exprimée en années, est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ .
On admet qu'en moyenne, un écran a une durée de vie de 10 ans.
1) Déterminer la valeur de λ .

2) Déterminer la probabilité qu'un écran ait une durée de vie supérieure à 10 ans, puis la probabilité qu'un écran ait une durée de vie supérieure à 15 ans.

3) Si un tel écran fonctionne depuis 2 ans, quelle est la probabilité pour qu'il ait une durée de vie totale supérieure à 12 ans ?

Correction :

Ex 1 :

1) f est positive, continue et nulle en dehors de [0;1]

$\int_0^1 6x(1-x)\,dx=6\int_0^1 x-x^2\,dx=6\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=1$

2) $P\left(X\geqslant\frac{1}{2}\right)=P\left(\frac{1}{2}\leqslant X\leqslant 1\right)=\int_{\frac{1}{2}}^1 6x(1-x)dx=\ldots=\frac{1}{2}$

3) - si $t<0$, on a $F(t)=0$

- si $t>1$, $F(t)=1$

- si $t\in[0;1]$, $F(t)=P(X\leqslant t)=\int_0^t 6x(1-x)\,dx=6\int_0^t x-x^2\,dx=6\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^t=3t^2-2t^3$

4) $E(X)=\int_0^1 t f(t)\,dt=6\int_0^1 (t^2-t^3)\,dt=6\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{2}$

Ex 2 :

On note X la variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0;1[$

1) $P(X\in[0,2;0,3])=\frac{0,3-0,2}{1-0}=0,1$

2) $P(X\geqslant 0,6)=P(X\in[0,6;1])$ =...=0,4

3) $P(X\in[0,72;0,73[\cup[0,82;0,83[\cup[0,92;0,93[)$
= $P(X\in[0,72;0,73[)+P(X\in[0,82;0,83[)+P(X\in[0,92;0,93[)$
= 0,01+0,01+0,01=0,03

Ex 3 :

1) $E(X)=10 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}=10 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{10}$

2) $P(X>10)=e^{-10\times\frac{1}{10}}=e^{-1}$ et $P(X>15)=e^{-15\times\frac{1}{10}}=e^{-1,5}$

3) Il s'agit ici du phénomène de mort sans vieillissement modélisé par la loi exponentielle. On a donc directement :

$P_{X>2}(X>12)=P_{X>2}(X>2+10)=P(X>10)=e^{-1}$