Tcomp **Devoir n ° 7 - Durée 1 h**
- Calculatrices autorisées

Barème : **Ex1 :** 9 pts - **Ex2 :** 5 pts - **Ex3 :** 6 pts	**Nom :**

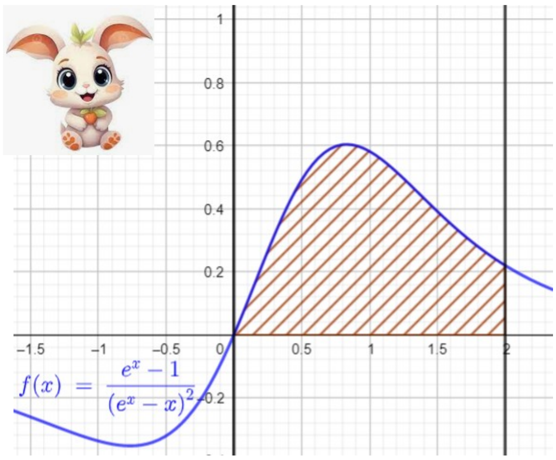
Répondre sur cette feuille

Ex 1 : 1) a) Déterminer l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{e^x-1}{(e^x-x)^2}$

b) Déterminer la primitive de f vérifiant $F(1)=0$

2) Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^x-1}{(e^x-x)^2}\,dx$ (Aide : une valeur approchée du résultat,utilisable dans la suite de l'exercice, est 0,8144)

3) On a représenté f dans un repère orthogonal tel qu'une unité représente 2 cm sur l'axe des abscisses et une unité représente 5 cm sur l'axe des ordonnées .
Déterminer en cm^2 une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire A de la partie hachurée .

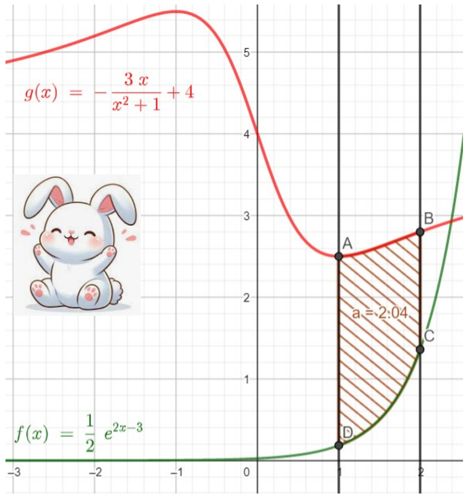


4) Déterminer la valeur moyenne de f sur [0;2].

Ex 2 : 1) Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x-3}$

2) Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-\dfrac{3x}{x^2+1}+4$

3) En déduire la valeur exacte en unité d'aire
de l'aire hachurée (notée A) ci-contre. (Aide : une valeur approchée est 2,04 ua)



Ex 3 : Soit a et b des nombres réels tels que $a<b$, f et g des fonctions continues sur $[a;b]$. On pose $\mathrm{I}=\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ et $\mathrm{J}=\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$
Exprimer les intégrales suivantes en fonction de I et J .

1) $\int_b^a 2f(x)\ \mathrm{d}x$

2) $\int_a^b f(x)-g(x)\ \mathrm{d}x$

3) $c\in[a;b]$, $\int_b^c g(x)\ \mathrm{d}x$ - $\int_a^c g(x)\ \mathrm{d}x$

4) $\int_a^b \dfrac{-3}{x}+\dfrac{2}{3}g(x)\ \mathrm{d}x$

Correction :

Ex 1 :

1) a) Les fonctions de la forme $F(x)=-\frac{1}{e^x-x}+k$ où $k\in\mathbb{R}$ sont les primitives de f sur $\mathbb{R}$

b) $F(1)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{e-1}+k=0 \Leftrightarrow k=\frac{1}{e-1}$

Ainsi la primitive cherchée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=-\frac{1}{e^x-x}+\frac{1}{e-1}$

2) $\int_0^2 \frac{e^x-1}{(e^x-x)^2}\,dx=\left[\frac{-1}{e^x-x}\right]_0^2=\frac{-1}{e^2-2}+\frac{1}{e^0}=1-\frac{1}{e^2-2}=\frac{e^2-2-1}{e^2-2}=\frac{e^2-3}{e^2-2}$

3) $A=\int_0^2 \frac{e^x-1}{(e^x-x)^2}\,dx$ ua

Or 1 ua = $2\times 5 \ cm^2 = 10 \ cm^2$

Ainsi A $\approx 8{,}14 \ cm^2$

4) On obtient $\frac{1}{2}\times\frac{e^2-3}{e^2-2}=\frac{e^2-3}{2e^2-4}$

Ex 2 :

1) $F(x)=\frac{1}{4}e^{2x-3}$ est une primitive de f

2) $G(x)=-\frac{3}{2}\ln(x^2+1)+4x$ est une primitive de G

3) $A=\int_1^2 g(x)\,dx - \int_1^2 f(x)\,dx = \left[-\frac{3}{2}\ln(x^2+1)+4x\right]_1^2-\left[\frac{1}{4}e^{2x-3}\right]_1^2 \ =-\frac{3}{2}\ln(5)+8-\frac{3}{2}\ln(2)-4-\left(\frac{1}{4}e-\frac{1}{4}e^{-1}\right)$ ua

On trouve

$A \ =-\frac{3}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right)+4-\frac{1}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right)$ ua

Ex 3 :

1) $\int_b^a 2f(x)\,dx=-2\int_a^b f(x)\,dx=-2I$

2) $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx=I-J$

(Propriété de linéarité de l'intégrale)

3) $\int_b^c g(x)\,dx-\int_a^c g(x)\,dx=\int_b^c g(x)\,dx+\int_c^a g(x)\,dx=\int_b^a g(x)\,dx=-\int_a^b g(x)\,dx=-J$

(Chasles)

4) $\int_a^b \left(\frac{-3}{x}+\frac{2}{3}g(x)\right)dx=-3\int_a^b \frac{1}{x}\,dx+\frac{2}{3}\int_a^b g(x)\,dx$

(Propriété de linéarité de l'intégrale).

Donc $\int_a^b \left(\frac{-3}{x}+\frac{2}{3}g(x)\right)dx=-3[\ln(x)]_a^b+\frac{2}{3}J=3(\ln(a)-\ln(b))+\frac{2}{3}J$