Tcomp **Devoir n ° 6 - Durée 1 h**

- Calculatrices autorisées

Barème :	**Nom :**
Ex1 : 9 pts - **Ex2 :** 4 pts - **Ex3 :** 7 pts -	

Répondre sur cette feuille

Ex 1 : Dans chacun des cas, déterminer la primitive de la fonction donnée sur l'intervalle I vérifiant la condition donnée.

1) $f(x)=3\mathrm{e}^{-x}+2x^3+3x^4$ sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ et telle que $\mathrm{F}(0)=2$

2) $g(x)=(4x-2)\mathrm{e}^{x^2-x+5}$ sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ et telle que $\mathrm{G}(0)=0$

3) $\mathrm{h}(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3+3x}$ sur $\mathrm{I}=\ ]0;+\infty[$ et telle que $\mathrm{H}(1)=\dfrac{2\ln(2)}{3}$

Ex 2 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2(x+1)^{1000}$.

1) Déterminer trois réels a , b et c tels que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $x^2=a(x+1)^2+b(x+1)+c$

2) En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

<u>Ex 3 :</u> Soit l'équation différentielle $(\mathrm{E}) : y' - 3y = (3x+7)\mathrm{e}^{2x}$

1) Résoudre l'équation différentielle $(\mathrm{E_0}) : y' - 3y = 0$.

2) a) Déterminer la fonction dérivée $g'(x)$, de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{2x}$.

b) Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme $g(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{2x}$.

<u>Propriété :</u>

Pour trouver **<u>TOUTES</u>** les solutions de l'équation complète (E) , il suffit de trouver les solutions de l'équation homogène associée $(\mathrm{E_0})$, et de leurs ajouter **<u>UNE</u>** solution particulière de l'équation complète.

3) En appliquant la propriété ci-dessus, déduire des deux questions précédentes l'ensemble des solutions de (E) .

4) Déterminer la solution h de (E) qui vérifie la condition initiale $h(0) = -9$

Correction :

Ex 1 :

1) On a $F(x)=-3e^x+\frac{x^4}{2}+\frac{3x^5}{5}+k$

De plus on a $F(0)=-3+k=2$, donc $k=5$.

On obtient donc $F(x)=-3e^x+\frac{x^4}{2}+\frac{3x^5}{5}+5$

2)On a $G(x)=2e^{x^2-x+5}+k$

De plus on a $G(0)=2e^5+k=0$, donc $k=-2e^5$

On obtient donc $G(x)=2e^{x^2-x+5}-2e^5$

3) On a $H(x)=\frac{1}{3}\ln(x^3+3x)+k$

De plus on a $H(1)=\frac{1}{3}\ln(4)+k=\frac{2\ln(2)}{3}$, donc $k=\frac{2\ln(2)}{3}-\frac{2\ln(2)}{3}=0$

On obtient donc $H(x)=\frac{1}{3}\ln(x^3+3x)$

Ex 2 :

1) Par identification, ou avec un peu d'intuition.

$a(x+1)^2+b(x+1)+c=a(x^2+2x+1)+bx+b+c=ax^2+(2a+b)x+a+b+c$

En identifiant avec x^2 , on obtient :

$$\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=0 \\ a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=1 \end{cases}$$

et donc : $x^2=(x+1)^2-2(x+1)+1$

2) En remplaçant x^2 par $(x+1)^2-2(x+1)+1$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x)&=x^2(x+1)^{1000} \\ &=((x+1)^2-2(x+1)+1)(x+1)^{1000} \\ &=(x+1)^{1002}-2(x+1)^{1001}+(x+1)^{1000} \end{aligned}$$

On en déduit maintenant facilement les primitives :

$$F(x)=\frac{(x+1)^{1003}}{1003}-2\frac{(x+1)^{1002}}{1002}+\frac{(x+1)^{1001}}{1001}+k \ , \ k\in\mathbb{R}$$

Ex 3 :

1) Les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont les fonctions de la forme $f(x)=ke^{3x}$ où $k\in\mathbb{R}$

2) a) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $g'(x)=ae^{2x}+(2ax+2b)e^{2x}=(2ax+a+2b)e^{2x}$

b) $g'(x)-3g(x)=(2ax+a+2b)e^{2x}-(3ax+3b)e^{2x}=(-ax+a-b)e^{2x}$

Par identification avec $(3x+7)e^{2x}$, on obtient :

$$\begin{cases} -a=3 \\ a-b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=-10 \end{cases}$$

Ainsi la fonction g définie par $g(x)=(-3x-10)e^{2x}$ est une solution particulière de (E)

3) Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme $h(x)=ke^{3x}-(3x+10)e^{2x}$ où $k\in\mathbb{R}$

4) $h(0)=-9 \Leftrightarrow k-10=-9 \Leftrightarrow k=1$