Tcomp **Devoir n ° 5 - Durée 1 h** - Calculatrices autorisées	**Barème :** **Partie A :** 6 pts - **Partie B :** 8 pts - **Partie C :** 8 pts	**Nom :**

Répondre sur cette feuille

D'après Baccalauréat Amérique du Nord 21 mai 2024

Un jeu vidéo récompense par un objet tiré au sort les joueurs ayant remporté un défi. L'objet tiré peut être « commun » ou « rare ». Deux types d'objets communs ou rares sont disponibles, des épées et des boucliers.
Les concepteurs du jeu vidéo ont prévu que :
- la probabilité de tirer un objet rare est de 7 %;
- si on tire un objet rare, la probabilité que ce soit une épée est de 80 %;
- si on tire un objet commun, la probabilité que ce soit une épée est de 40 %.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A : Un joueur vient de remporter un défi et tire au sort un objet.
On note : R l'évènement « le joueur tire un objet rare » et E l'évènement « le joueur tire une épée »;
1) Dresser un arbre pondéré modélisant la situation, puis calculer $P(R \cap E)$

2) Calculer la probabilité de tirer une épée.

3) Le joueur a tiré une épée. Déterminer la probabilité que ce soit un objet rare. Arrondir le résultat au millième.

Partie B :
Un joueur remporte 30 défis. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté 30 défis.
Les tirages successifs sont considérés comme indépendants.
1) Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres, ainsi que son espérance.

2) Déterminer P(X<6) . Arrondir le résultat au millième.

3) Déterminer la plus grande valeur de k telle que $P(X \geqslant k) > 0,5$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4) Les développeurs du jeu vidéo veulent proposer aux joueurs d'acheter un « ticket d'or » qui permet de tirer n objets. La probabilité de tirer un objet rare reste de 7 %. Les développeurs aimeraient qu'en achetant un ticket d'or, la probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare lors de ces n tirages soit supérieure ou égale à 0,95. Déterminer le nombre minimum d'objets à tirer pour atteindre cet objectif. On veillera à détailler la démarche mise en œuvre

Partie C : Un joueur très fort remporte systématiquement tous les défis . Il s'arrête dès qu'il obtient un objet rare.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de répétitions nécessaires pour obtenir le premier objet rare.
1) Déterminer, en expliquant, la loi suivie par X.

2) Quelle est la probabilité qu'il s'arrête au bout de 5 défis ?

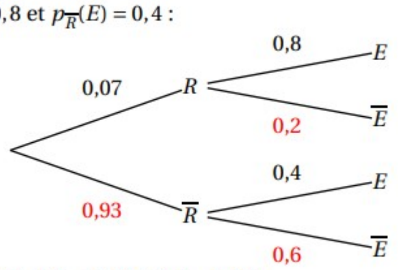
3) Quelle est la probabilité qu'il s'arrête avant 6 défis ?

4) Le joueur a déjà effectué 3 défis et obtenu que des objets communs . Quelle est la probabilité qu'il s'arrête au moins au bout de 7 défis ?

Correction :

Partie A

1. On dresse l'arbre pondéré de probabilités en utilisant les données de l'énoncé :
$p(R) = 0{,}07\,;\, p_R(E) = 0{,}8$ et $p_{\overline{R}}(E) = 0{,}4$:



On a $p(R \cap E) = p(R) \times p_R(E) = 0{,}07 \times 0{,}8 = 0{,}056$.

2. R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers

D'après la loi des probabilités totales :
$p(E) = p(R \cap E) + p\left(\overline{R} \cap E\right)$.
Or $p\left(\overline{R} \cap E\right) = p\left(\overline{R}\right) \times p_{\overline{R}}(E) = 0{,}93 \times 0{,}4 = 0{,}372$.
Donc $p(E) = 0{,}056 + 0{,}372 = 0{,}428$.

3. On a $p_E(R) = \dfrac{p(E \cap R)}{p(E)} = \dfrac{p(R \cap E)}{p(E)} = \dfrac{0{,}056}{0{,}428} = \dfrac{56}{428} = \dfrac{14}{107} \approx 0{,}1308$ soit $0{,}131$ au millième près.

Partie B

1 . On reconnaît un schéma de Bernoulli consistant en la répétition 30 fois de manière identique et indépendante de l'épreuve de Bernoulli de succès de probabilité 0,07.
X suit la loi binomiale de paramètres 30 et 0,07.
L'espérance mathématique est : $E(X) = n\,p = 30 \times 0{,}07$ = 2,1.

2 . La calculatrice donne $P(X<6) = P(X \leqslant 5)$ ≈ 0,9838 soit 0,984 au millième près.

3 .
Avec la calculatrice, on a : $P(X \geqslant 1)$ ≈ 0.887 , $P(X \geqslant 2)$ ≈ 0,631 et $P(X \geqslant 3)$ ≈ 0,351
On a donc $k = 2$.
Dans le cadre du jeu ceci signifie que la probabilité d'obtenir au moins 2 objets rares est supérieure à $\dfrac{1}{2}$.

4 .On reconnaît un schéma de Bernoulli consistant en la répétition n fois de manière identique et indépendante de l'épreuve de Bernoulli de succès de probabilité 0,07.
On note X_n la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.
X_n suit la loi binomiale de paramètres n et 0,07.
$P(X_n \geqslant 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - 0{,}93^n$

On a donc : $1 - 0{,}93^n \geqslant 0{,}95 \;\Leftrightarrow\; 0{,}93^n \leqslant 0{,}05 \;\Leftrightarrow\; n\ln(0{,}93) \leqslant \ln(0{,}05) \;\Leftrightarrow\; n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}93)}$ car $\ln(0{,}93) < 0$

Or $\dfrac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}93)} \approx 41{,}3$

Il faut que $n \geqslant 42$. À partir de 42 succès la probabilité d'obtenir un objet rare est supérieure ou égale à 0,95.

Partie C

1 . On reconnaît un schéma de Bernoulli consistant en la répétition de manière identique et indépendante de l'épreuve de Bernoulli de succès de probabilité 0,07
X suit la loi géométrique de paramètre 0,07.

2 . $P(X=5) = (1-0{,}07)^{5-1} \times 0{,}07 \approx 0.052$

3 . $P(X<6) = P(X \leqslant 5) = 1 - P(X>5) = 1 - (1-0{,}07)^5 \approx 0{,}304$

4 . On applique la propriété de « loi sans mémoire » .

$P_{X>3}(X \geqslant 10) = P_{X>3}(X>9) = P_{X>3}(X>6+3) = P(X>6) = (1-0{,}07)^6 \approx 0.647$