Tcomp **Devoir n ° 4 - Durée 1 h**
- Calculatrices interdites

Barème :	**Nom :**
1) 10 pts **2)** 10 pts	

Répondre sur cette feuille

Ex 1 : Répondre à chacune des questions suivantes en détaillant les calculs :

1	Déterminer la fonction réciproque de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x+5$	
2	Résoudre l'équation suivante : $(e^x-3)(e^{2x}-25)=0$	
3	Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x-e\ln x$	
4	Déterminer le plus petit entier n tel que : $3\times\left(\frac{5}{7}\right)^n<0,01$	
5	Résoudre l'équation suivante : $\ln(7x+2)\geqslant\ln(3-x)$	

Ex 2 : On étudie la propagation d'une maladie lors d'une épidémie.
Des relevés statistiques ont permis de modéliser, par une fonction f , le nombre de malades durant l'épidémie.
Cette fonction f est définie sur [1 ; 26] par : $f(t)=24t\ln(t)-3t^2+10$ où t est le nombre de semaines écoulées depuis le premier cas constaté et $f(t)$ est le nombre de milliers de malades comptabilisés après t semaines.

1) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f .

2) a) Déterminer la fonction dérivée f'' de la fonction f' .

b) Déterminer le tableau de variation de la fonction f' sur l'intervalle [1;26]

c) Montrer que l'équation $f'(t)=0$ admet, dans l'intervalle [1;26], une solution et une seule qu'on notera α et donner l'encadrement de α par deux entiers naturels consécutifs.

d) En déduire le signe de $f'(t)$ sur [1;26] et les variations de f sur [1;26].

3) Le réel $f'(t)$ représente la vitesse de propagation de la maladie au bout de t semaines.
a) Dans le contexte du problème, donner une interprétation de l'expression mathématique suivante : « sur [4 ; 26], f' est décroissante. »

b) À partir des questions précédentes, déterminer le nombre de semaines écoulées à partir duquel le nombre de malades par semaine a commencé à diminuer.

Correction :

Ex 1 : Répondre à chacune des questions suivantes en détaillant les calculs :

1	Déterminer la fonction réciproque de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x+5$	$y=2x+5 \Leftrightarrow 2x=y-5$ $\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}y-\frac{5}{2}$ On obtient $f^{-1}:x\longmapsto \frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$
2	Résoudre l'équation suivante : $(e^x-3)(e^{2x}-25)=0$	$(e^x-3)(e^{2x}-25)=0 \Leftrightarrow e^x=3$ ou $e^{2x}=25$ $\Leftrightarrow x=\ln(3)$ ou $2x=\ln(25)$ $\Leftrightarrow x=\ln(3)$ ou $2x=2\ln(5)$ $\Leftrightarrow x=\ln(3)$ ou $x=\ln(5)$ D'où l'ensemble S des solutions de l'équation de départ : $S=\{\ln(3);\ln(5)\}$
3	Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x-e\ln x$	$\lim\limits_{x\to+\infty} -3x-e\ln x=-\infty$ (Par somme)
4	Déterminer le plus petit entier n tel que : $3\times\left(\frac{5}{7}\right)^n<0,01$	$3\times\left(\frac{5}{7}\right)^n<0,01 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{7}\right)^n<\frac{0,01}{3}$ $\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{5}{7}\right)^n\right)<\ln\left(\frac{0,01}{3}\right)$ $\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{5}{7}\right)<\ln\left(\frac{0,01}{3}\right)$ $\Leftrightarrow n>\frac{\ln\left(\frac{0,01}{3}\right)}{\ln\left(\frac{5}{7}\right)}$ (car $\ln\left(\frac{5}{7}\right)<0$) Or $\frac{\ln\left(\frac{0,01}{3}\right)}{\ln\left(\frac{5}{7}\right)}\approx 16,95$ Donc $n=17$
5	Résoudre l'équation suivante : $\ln(7x+2)\geqslant\ln(3-x)$	L'équation n'a de sens que pour : $\begin{cases}7x+2>0\\3-x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>-\frac{2}{7}\\x<3\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left]-\frac{2}{7};3\right[$ Pour $x\in\left]-\frac{2}{7};3\right[$, on a : $\ln(7x+2)\geqslant\ln(3-x) \Leftrightarrow 7x+2\geqslant 3-x \Leftrightarrow 8x\geqslant 1 \Leftrightarrow x\geqslant\frac{1}{8}$ L'ensemble des solutions est $S=\left[\frac{1}{8};3\right[$

Ex 2 : D’après BAC Asie 19 juin 2014

1) $f\,'(t)=24\ln(t)-6t+24$

2) a) $f\,''(t)=\dfrac{24}{t}-6$

b) Sur [1;26], on a :

$$\frac{24}{t}-6>0 \;\Leftrightarrow\; \frac{24}{t}>6 \;\Leftrightarrow\; 4>t$$

t	1		4		26
$f\,''(t)$		+	0	-	
$f\,'$		↗	$f\,'(4)$	↘	
	18				$f\,'(26)$

$f'(1)=18>0$; $f'(4)=24\ln 4\approx 33{,}3>0$ et $f'(26)=24\ln(26)-132\approx -53{,}8<0$

c)

$f\,'$ est continue et strictement décroissante sur $[4;26]$.

$0\in[f\,'(26);f\,'(4)]$

D’après le corollaire du TVI, l’équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $[4;26]$

On trouve 14 < α < 15.

d)

Du tableau de variations, on peut déduire que $f'(t)>0$ sur $[1;\alpha[$ et que $f'(t)<0$ sur $]\alpha;26]$.

Donc la fonction f
- est strictement croissante sur $[1;\alpha]$;
- est strictement décroissante sur $[\alpha;26]$;
- atteint un maximum pour $x=\alpha$.

3. Le réel $f'(t)$ représente la vitesse de propagation de la maladie au bout de t semaines.

a. L’expression mathématique suivante : « sur $[4\,;\,26]$, f' est décroissante » signifie que sur cet intervalle, la vitesse de propagation de la maladie diminue.

b. Le nombre de malades par semaine commence à diminuer quand la vitesse de propagation devient négative, donc quand $f'(t)$ devient négatif, c’est-à-dire pour $t>\alpha$; donc il s’est écoulé 14 semaines avant que le nombre de malades par semaine commence à diminuer.