Tcomp **Devoir surveillé n ° 1**

- Durée 1 h
- Calculatrices autorisées

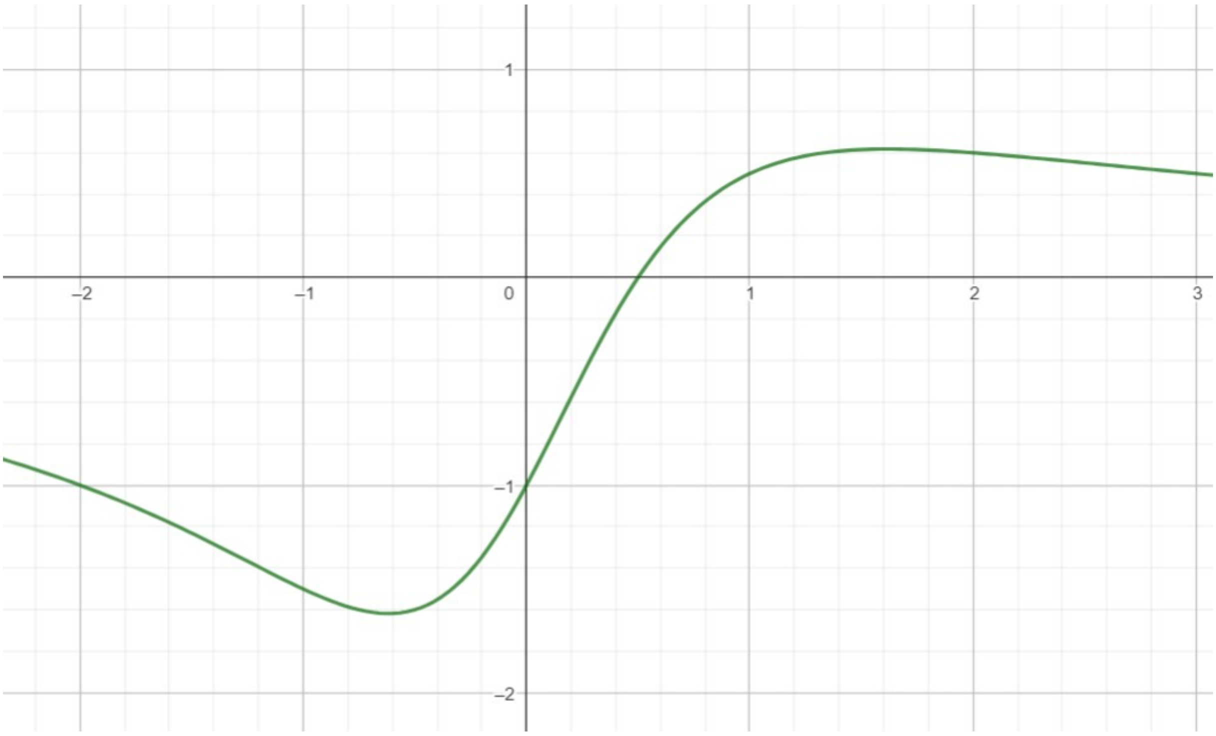
Barème : **1)** 5 pts **2)** 5 pts 3 **)** 10 pts	**Nom :**

Répondre sur cette feuille

Ex 1 : Pour chacune des suites ci-dessous, cocher les bonnes réponses.

La suite (u_n) est :	géométrique	arithmétique	croissante	décroissante	Non monotone
1) $u_n=-2n+3$					
2) $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=5u_n \end{cases}$					
3) $u_n=(-1)^n$					
4) $u_n=\sqrt{n}$					
5) $\begin{cases} u_0=2 \\ u_n=u_{n+1}-2 \end{cases}$					

Ex 2 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x)=\frac{2x-1}{x^2+1}$ (dont la représentation graphique est donnée ci-dessous) et la suite (u_n), définie par $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$. Représenter les premiers termes de la suite (u_n) sur les axes, puis conjecturer le comportement de la suite (variations et limites éventuelles).



Ex 3 : Étudier dans chaque cas la convergence de la suite (u_n).

1) $u_n=\frac{2n^5}{5}+\frac{n^2}{4}-e$

2) $u_n = \frac{-3n^2 - 3n + 1}{-2n^2 + 4}$

3) $u_n = \frac{5\cos(n-1)}{n^2}$

4) $u_n = 3(-1)^n + 2n^2$

5) $u_n = \frac{27^n}{28^n}$

Correction :

Ex 1 :

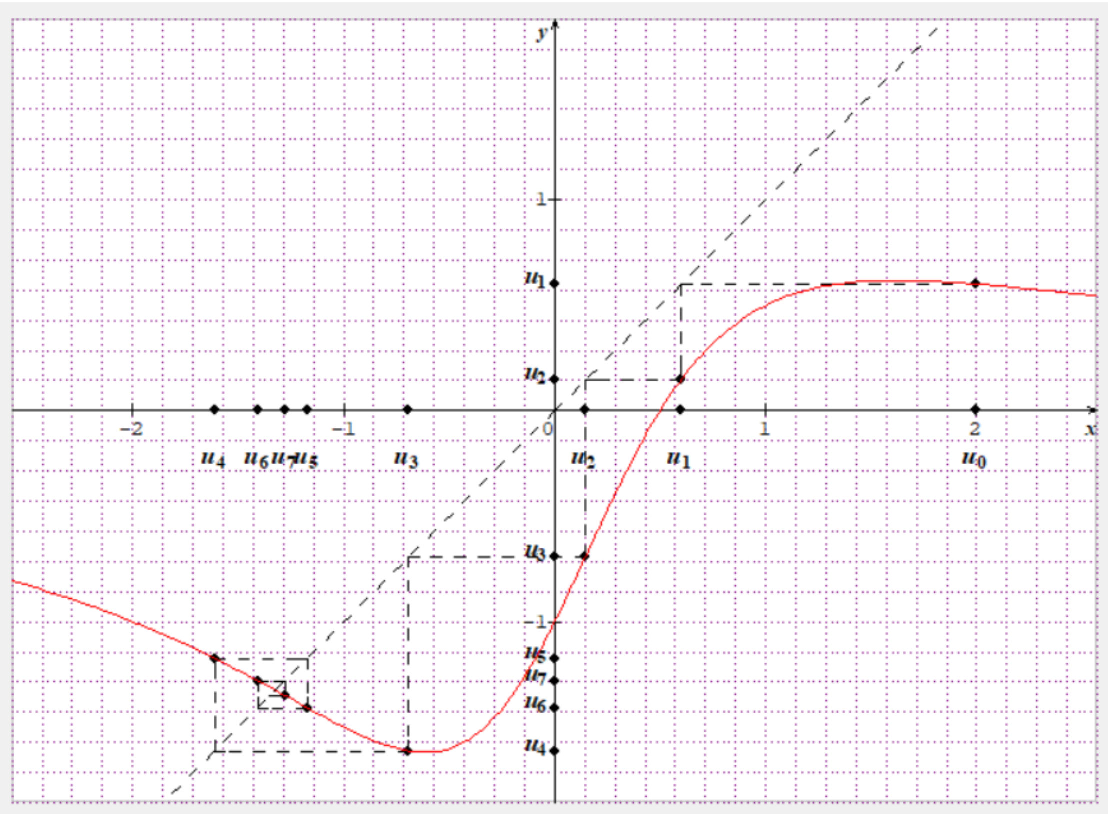
La suite (u_n) est :	géométrique	arithmétique	croissante	décroissante	Non monotone
1) $u_n=-2n+3$		x		x	
2) $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=5u_n \end{cases}$	x		x		
3) $u_n=(-1)^n$	x				x
4) $u_n=\sqrt{n}$			x		
5) $\begin{cases} u_0=2 \\ u_n=u_{n+1}-2 \end{cases}$		x	x		

Ex 2 :

La suite n'est ni croissante, ni décroissante.

La suite semble tendre vers l'abscisse du point d'intersection

de la courbe représentant la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+1}$ et la droite d'équation $y=x$.



Ex 3 :

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n=n^5\left(\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{4n^3}-\dfrac{e}{n^5}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^5=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{4n^3}-\dfrac{e}{n^5}\right)=\dfrac{2}{5}$ (par somme)

Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\infty$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n=\dfrac{-3n^2-3n+1}{-2n^2+4}=\dfrac{n^2\left(-3-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(-2+\dfrac{4}{n^2}\right)}=\dfrac{-3-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{-2+\dfrac{4}{n^2}}$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} -3-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}=-3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -2+\dfrac{4}{n^2}=-2$

Donc par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\dfrac{3}{2}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leqslant \cos(n-1) \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad -5 \leqslant 5\cos(n-1) \leqslant 5 \quad \Rightarrow \quad -\frac{5}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \frac{5}{n^2}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{5}{n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{5}{n^2} = 0$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant (-1)^n \quad \Rightarrow \quad -3 \leqslant 3(-1)^n \quad \Rightarrow \quad -3+2n^2 \leqslant 3(-1)^n + 2n^2$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} -3+2n^2 = +\infty$

Donc d'après les théorèmes de comparaison en l'infini, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

5) $u_n = \frac{27^n}{28^n} = \left(\frac{27}{28}\right)^n$.

(u_n) est donc une suite géométrique de raison comprises strictement entre -1 et 1.

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$