1èreS **Devoir Surveillé n ° 8** - Durée 1 h - Calculatrices autorisées	**Barème :** **1)** *4 pts* **2)** 6 *pts* ***3)*** 4 *pts* **3)** 6 *pts*	**Nom :**

Commentaires : *Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées .Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage …*

Généralités sur les suites

Ex 1 :

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel, par $u_n=2n^3-13n^2+21n+7$

1) Déterminer u_0 et u_1 .

2) La proposition P : « $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=7$ » est-elle vraie ? Justifier.

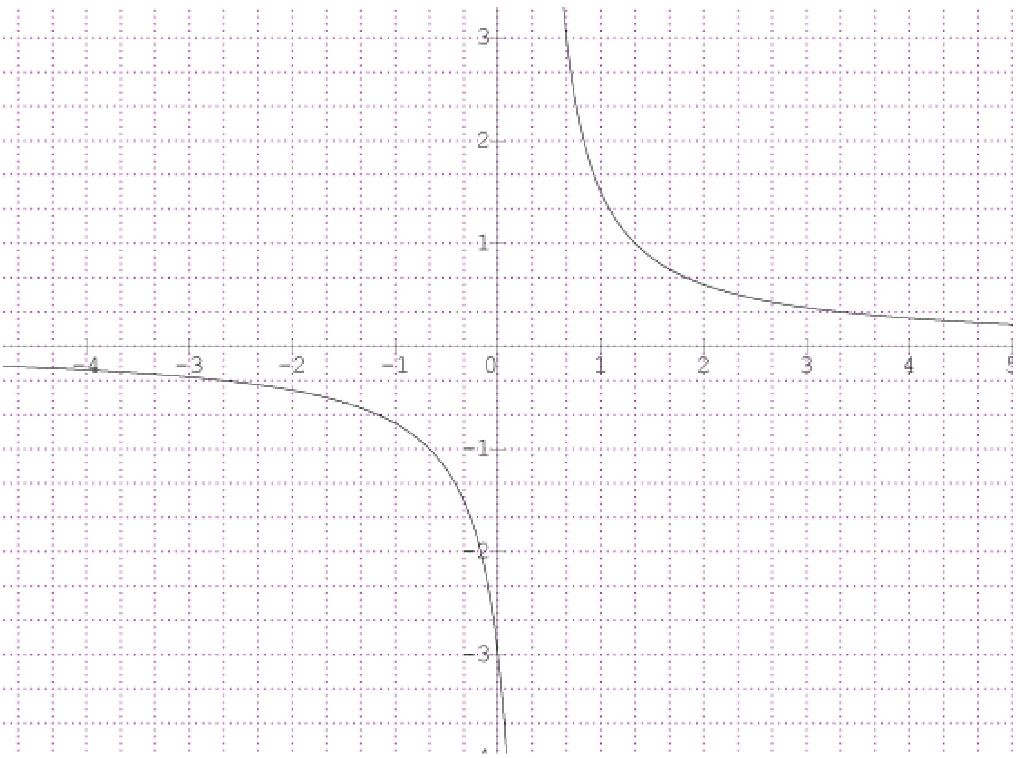
3) Écrire la négation de la proposition P.

4) Combien de termes u_n sont-ils égaux à 7 ? Justifier.

Ex 2 :

On considère la fonction f définie pour $x\neq\frac{1}{3}$ par $f(x)=\frac{3}{3x-1}$ et la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n , par $u_{n+1}=f(u_n)$ et $u_0=-4$.

À l'aide de la droite $d: y=x$, représenter les premiers termes de la suite, puis conjecturer le comportement de la suite (variations et limites éventuelles).



2) Résoudre l'équation $f(x)=x$

3) Quelle semble être la limite de la suite (u_n) ? Donner une valeur exacte.

4) En utilisant la calculatrice déterminer à partir de quel rang $\left|\frac{1-\sqrt{37}}{6}-u_n\right|<10^{-5}$

Ex 3 : Dans chaque cas, étudier la monotonie de la suite (u_n) .

1) $u_0=5$ et $u_{n+1}=u_n-2n^2-3$	2) $u_n=1\times2\times3\times\ldots\times n$

Ex 4 :

Un QCM est composé de 10 questions indépendantes.
Pour chaque question cinq réponses sont proposées et une seule de ces cinq réponses est juste.
Un élève répond au hasard aux 10 questions de ce QCM.
On appelle N le nombre de réponses justes qu'il obtient.

1) Montrer que la loi de probabilité de N est une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

2) Calculer $P(N=10)$ et $P(N\geq5)$ à 10^{-4} près.

3) Le QCM est noté +2 pour une bonne réponse et 0 pour une mauvaise réponse ?

Toute la classe répond au hasard . Que peut-on dire de la moyenne de la classe ?

4) Quelle est la probabilité qu'un élève ait au-dessus de la moyenne ?

5) Dans la classe de 1S10, comportant 27 champions des probabilités, qu'elle est la probabbilité que 5 élèves aient au-dessus de la moyenne ?

Correction

Ex 1 :

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel, par $u_n = 2n^3 - 13n^2 + 21n + 7$

1) $u_0 = 7$ et $u_1 = 17$
2) Contre-exemple : $u_1 \neq 7$, donc la proposition est fausse.
3) $\exists n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 7$
4) Combien de termes u_n sont-ils égaux à 7 ? Justifier.

On résout l'équation $u_n = 7$ dans $\mathbb{N}$:

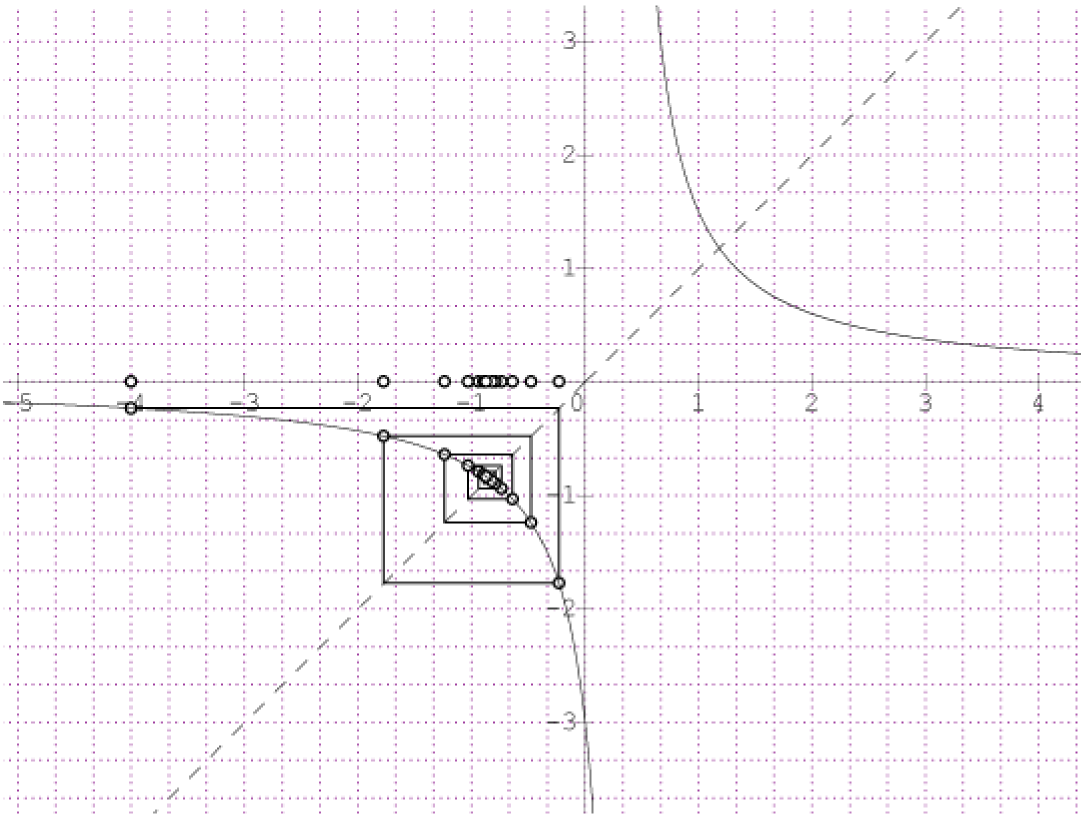
$$\begin{aligned} u_n = 7 \quad & \Leftrightarrow \quad 2n^3 - 13n^2 + 21n + 7 = 7 \\ & \Leftrightarrow \quad 2n^3 - 13n^2 + 21n = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad n(2n^2 - 13n + 21) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad n = 0 \text{ ou } 2n^2 - 13n + 21 = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad n = 0 \text{ ou } n = 3 \text{ ou } n = \frac{7}{2} \text{ (racines évidentes ou } \Delta \text{)} \end{aligned}$$

Il faut exclure $\frac{7}{2}$ qui n'est pas un entier naturel.

Il y a donc deux termes : u_0 et u_3

Ex 2 :

1) On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{3}{3x-1}$ et la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = -4$.
À l'aide de la droite $d : y = x$, représenter les premiers termes de la suite , puis conjecturer le comportement de la suite (variations et limites éventuelles).



On conjecture que (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante et que sa limite est l'abscisse du point d'intersection de C_f et de la droite d'équation $y = x$.

2) Résoudre l'équation $f(x) = x$

Pour $x \neq \frac{1}{3}$, $f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{3x-1} = x \quad \Leftrightarrow \quad 3 = 3x^2 - x \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - x - 3 = 0$

$\Delta = 1-4\times3(-3) = 37 \quad x_1 = \frac{1+\sqrt{37}}{6}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{37}}{6}$

3) Quelle semble être la limite de la suite (u_n) ? Donner une valeur exacte.

$x_1 > 0$, donc la limite de la suite (u_n) semble être x_2 .

4) En utilisant la calculatrice déterminer à partir de quel rang $\left|\frac{1-\sqrt{37}}{6} - u_n\right| < 10^{-5}$

C16 =ABS(((1-RACINE(37))/6-B16))>0,01

	A	B	C	D	E
1	0	-4	VRAI		
2	1	-0,230769231	VRAI		
3	2	-1,772727273	VRAI		
4	3	-0,474820144	VRAI		
5	4	-1,237388724	VRAI		
6	5	-0,636649874	VRAI		
7	6	-1,030945683	VRAI		
8	7	-0,732987892	VRAI		
9	8	-0,937803709	VRAI		
10	9	-0,786697238	VRAI		
11	10	-0,892832772	VRAI		
12	11	-0,81555019	VRAI		
13	12	-0,870410255	VRAI		
14	13	-0,830741704	VRAI		
15	14	-0,85905115	VRAI		
16	15	-0,838655663	FAUX		
17	16	-0,853250332	FAUX		
18	17	-0,842755576	FAUX		

Ex 3 :

Dans chaque cas, étudier la monotonie de la suite (u_n) .

1) $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n - 2n^2 - 3$ 2) $u_n = 1\times2\times3\times\ldots\times n$

1) Pour tout $n \geqslant 0$, on a :
$u_{n+1} - u_n = -2n^2 - 3 \leqslant 0$
Ainsi (u_n) est décroissante

2) $u_n = 1\times2\times3\times\ldots\times n = n!$
Pour tout $n \geqslant 1$, on a :
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1\times2\times\ldots n\times(n+1)}{1\times2\times\ldots n} = n+1 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \Rightarrow u_{n+1} \geqslant u_n$
(car $u_n > 0$)
Ainsi (u_n) est croissante.

Ex 4 :

Un QCM est composé de 10 questions indépendantes.
Pour chaque question cinq réponses sont proposées et une seule de ces cinq réponses est juste.
Un élève répond au hasard aux 10 questions de ce QCM.
On appelle N le nombre de réponses justes qu'il obtient.

1) Montrer que la loi de probabilité de N est une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

On reconnaît un schéma de Bernoulli consistant en la répétition 10 fois de manière indépendante de l'épreuve de Bernoulli de succès de probabilité $\frac{1}{5} = 0,2$.

N suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0,2.

2) Calculer $P(N=10)$ et $P(N\geq5)$ à 10^{-4} près.

$P(N=10)=0,2^{10}\approx 0$ et $P(N\geq5)\approx 0{,}0328$

3) Le QCM est noté +2 pour une bonne réponse et 0 pour une mauvaise réponse ?

Toute la classe répond au hasard . Que peut-on dire de la moyenne de la classe ?

$E(N)=10\times 0,2=2$

La classe en répondant au hasard peut espérer avoir deux réponses justes par élève, ce qui correspond à une moyenne de 4.

4) Quelle est la probabilité qu'un élève ait au-dessus de la moyenne ?

$P(N\geq5)\approx 0{,}0328$

5) Dans la classe de 1S10, comportant 27 champions des probabilités, qu'elle est la probabbilité que 5 élèves aient au-dessus de la moyenne ?

On reconnaît un schéma de Bernoulli consistant en la répétition 27 fois de manière indépendante de l'épreuve de Bernoulli de succès de probabilité $P(N\geq5)\approx 0{,}0328$.

On note Y la variable aléatoire comptant le nombre d'élèves ayant au-dessus de la moyenne.

Y suit la loi binomiale de paramètres 27 et 0,0328.

La probabbilité que 5 élèves aient au-dessus de la moyenne est : $P(Y\geqslant5)\approx 0{,}0017$