

1èreS Devoir Surveillé n° 6

- Durée 1 h
- Calculatrices interdites

Barème :**1) 11 pts 2) 4 pts 3) 5 pts****Nom :**

Commentaires : Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez. La rédaction est importante. Soyez propre et clair. Bon courage ...

Ex 1 :

1) Déterminer les dérivées des fonctions définies par les formules suivantes (sans préciser les ensembles sur lesquels les calculs sont valables). Présenter les résultats sous une forme permettant l'étude du signe. Ne donner que le résultat, sans les étapes de calcul.

$f_1(x) = 2x^3 - 5x^4$	
$f_2(x) = 3x^3 + \frac{5}{x^7}$	
$f_3(x) = \sqrt{x}(x-2)$	
$f_4(x) = \frac{4}{7} + \sqrt{5}$	
$f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	
$f_6(x) = \frac{2-x}{x^2-5}$	
$f_7(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-5} - \frac{2}{3}$	

2) Déterminer les abscisses des points de C_{f_1} (avec $f_1(x) = 2x^3 - 5x^4$) où C_{f_1} admet une tangente horizontale.

3) Déterminer le tableau de variations de f_6 (avec $f_6(x) = \frac{2-x}{x^2-5}$), en précisant l'ensemble de définition et en justifiant la dérivabilité.

Ex 2 :

Un joueur choisit aléatoirement un entier compris entre 1 et 20 :

S'il est premier il gagne 3 euros.	Si c'est un multiple de 4 différent de 4, il gagne un euro.	Sinon, il perd 4 euros.
------------------------------------	---	-------------------------

On note G la variable aléatoire correspondant au gain obtenu.

1) Déterminer l'espérance de G et interpréter ce résultat ?

2) Modifier le montant du gain obtenu pour un multiple de 5, afin que le jeu soit équitable . Expliquer la démarche.

Ex 3 : Vrai ou faux (+0,5 pour une réponse juste : -0,5 pour une réponse fausse)

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω . On note A et B deux événements et X une variable aléatoire définie sur Ω .

1) X est forcément une fonction de Ω dans \mathbb{N} .	
2) La probabilité de A peut être nulle.	
3) On a toujours $P(A \cap B) \leq P(A \cup B)$	
4) Si 2 et 3 sont deux valeurs prises par X , on a alors forcément $P(X=2) < P(X=3)$	
5) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$	
6) La probabilité de A peut être $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.	
7) Si A et B vérifient $P(A) + P(B) = 1$, alors A et B sont contraires.	
8) Si A et B ont le même nombre d'événements élémentaires, alors on a forcément $P(A) = P(B)$	
9) Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$	
10) Ω et $X(\Omega)$ ont le même nombre d'éléments.	

Correction :

Ex 1 :

1) Déterminer les dérivées des fonctions définies par les formules suivantes (sans préciser les ensembles sur lesquels les calculs sont valables) . Présenter les résultats sous une forme permettant l'étude du signe . Ne donner que le résultat, sans les étapes de calcul.

$f_1(x) = 2x^3 - 5x^4$	$f'_1(x) = 6x^2 - 20x^3 = 2x^2(3 - 10x)$
$f_2(x) = 3x^3 + \frac{5}{x^7}$	$f'_2(x) = 9x^2 - \frac{35}{x^8} = \frac{9x^{10} - 35}{x^8}$
$f_3(x) = \sqrt{x}(x-2)$	$f'_3(x) = (\sqrt{x})'(x-2) + \sqrt{x}(x-2)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-2) + \sqrt{x} = \frac{x-2+2\sqrt{x}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-2}{2\sqrt{x}}$
$f_4(x) = \frac{4}{7} + \sqrt{5}$	$f'_4(x) = 0$
$f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$f'_5(x) = -\frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}^2} = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$
$f_6(x) = \frac{2-x}{x^2-5}$	$f'_6(x) = \frac{(2-x)'(x^2-5) - (2-x)(x^2-5)'}{(x^2-5)^2} = \frac{(-1)(x^2-5) - (2-x)2x}{(x^2-5)^2} = \frac{5-x^2-4x+2x^2}{(x^2-5)^2}$ $f'_6(x) = \frac{5-x^2-4x+2x^2}{(x^2-5)^2} = \frac{x^2+5-4x}{(x^2-5)^2}$
$f_7(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-5} - \frac{2}{3}$	$f'_7(x) = \frac{(\sqrt{x})'(x-5) - \sqrt{x}(x-5)'}{(x-5)^2} = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x-5) - \sqrt{x}}{(x-5)^2} = \frac{(x-5) - 2\sqrt{x}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x-5)^2} = \frac{-5-x}{2\sqrt{x}(x-5)^2}$

2) Déterminer les abscisses des points de C_{f_1} (avec $f_1(x) = 2x^3 - 5x^4$) où C_{f_1} admet une tangente horizontale.

Il suffit de résoudre l'équation : $f'_1(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2(3-10x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 0$ ou $3-10x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{3}{10}$

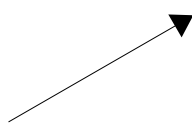

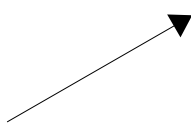

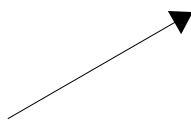
3) Déterminer le tableau de variations de f_6 (avec $f_6(x) = \frac{2-x}{x^2-5}$), en précisant l'ensemble de définition et en justifiant la dérivabilité.

On a $D_{f_6} = \mathbb{R} - \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$. f_6 étant une fonction rationnelle, elle est dérivable sur D_{f_6} .

On a trouvé, pour tout $x \in D_{f_6}$, $f'_6(x) = \frac{x^2+5-4x}{(x^2-5)^2}$

$f'_6(x)$ est du signe du trinôme $x^2 - 4x + 5$

$\Delta < 0$, donc $x^2 - 4x + 5$ est toujours positif.

x	$-\infty$	$-\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	$+\infty$	
$f'_6(x)$	+		+	+	
f_6					

Ex 2 :

Un joueur choisit aléatoirement un entier compris entre 1 et 20 :

S'il est premier il gagne 3 euros.	Si c'est un multiple de 4 différent de 4, il gagne un euro.	Sinon, il perd 4 euros.
------------------------------------	---	-------------------------

On note G la variable aléatoire correspondant au gain obtenu.

1) Déterminer l'espérance de G et interpréter ce résultat ?

L'univers Ω est constitué de 20 issues équiprobables.

$G(\Omega) = \{-4; 1; 3\}$

nombre premiers : 2,3,5,7,11,13,17,19

multiples de 4 différents de 4 : 8,12,16,20

x_i	-4	1	3
$P(X=x_i)$	$\frac{8}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{8}{20}$

$$E(G) = -4 \times \frac{8}{20} + 1 \times \frac{4}{20} + 3 \times \frac{8}{20} = -\frac{4}{20} = -\frac{1}{5}$$

En moyenne le joueur perd 1 euro toutes les 5 parties.

2) Modifier le montant du gain obtenu pour un multiple de 5, afin que le jeu soit équitable . Expliquer la démarche.

Soit a le gain cherché.

x_i	-4	a	3
$P(X=x_i)$	$\frac{8}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{8}{20}$

On doit avoir :

$$E(G) = -4 \times \frac{8}{20} + a \times \frac{4}{20} + 3 \times \frac{8}{20} = 0 \Leftrightarrow a = 2$$

Ex 3 : Vrai ou faux (+0,5 pour une réponse juste : -0,5 pour une réponse fausse)

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω . On note A et B deux événements et X une variable aléatoire définie sur Ω .

1) X est forcément une fonction de Ω dans \mathbb{N} .	F
2) La probabilité de A peut être nulle.	V
3) On a toujours $P(A \cap B) \leq P(A \cup B)$	V
4) Si 2 et 3 sont deux valeurs prises par X, on a alors forcément $P(X=2) < P(X=3)$	F
5) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$	V
6) La probabilité de A peut être $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.	F
7) Si A et B vérifient $P(A) + P(B) = 1$, alors A et B sont contraires.	F
8) Si A et B ont le même nombre d'événements élémentaires, alors on a forcément $P(A) = P(B)$	F
9) Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$	V
10) Ω et $X(\Omega)$ ont le même nombre d'éléments.	F