1èreS **Devoir Surveillé n ° 5**
- Durée 1 h
- Calculatrices interdites

Barème : **1)** 4 pts **2)** 7 pts **3)** 7 pts **4)** 2 pts	**Nom :**

Commentaires : *Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées .Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage …*

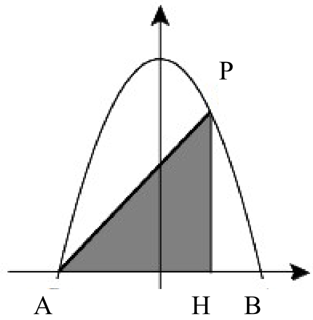
Ex 1 :

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes (sans préciser les ensembles sur lesquels les calculs sont valables)

$f(x)=4x^3+\frac{5}{x^7}$ et $g(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)(3x^2-2)$ (Présenter les résultats sous forme de quotient , c'est à dire après avoir mis au même dénominateur)

Ex 2 :

La parabole d'équation $y=-\frac{2}{9}x^2+8$ coupe l'axe des abscisses en A et B.
Le point $\mathrm{P}(x\,;y)$ se déplace sur la parabole entre A et B.



Le but du problème est de déterminer **les coordonnées du point P** pour que l'aire du triangle rectangle grisé soit maximale.

1) Déterminer les coordonnées des points A et B.

2) On note $f(x)$, l'aire du triangle en fonction de x .
a) Déterminer l'ensemble de définition de f .

b) Montrer que $f(x) = -\frac{1}{9}x^3-\frac{2}{3}x^2+4x+24$

3) Etudier les variations de f .

4) Répondre au problème posé.

Ex 3 : ATTENTION … vérifier plusieurs fois la dérivée avant de poursuivre l'exercice (on trouve $f'(x)=\frac{-5-x}{2\sqrt{x}(x-5)^2}$ …)

f est la fonction définie sur $[0\,;5[$ par :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-5}-\frac{2}{3}$$

On note C la courbe représentant f dans un repère.
1) Déterminer la fonction dérivée de f sur $]0\,;5[$. (En justifiant la dérivabilité . On admet que f n'est pas dérivable en 0)

2) La courbe C admet-elle une tangente horizontale sur $[0\,;5[$?
Si oui, en quel point ?

3) Déterminer le tableau de variation de f

4) Déterminer l'équation de la tangente T_2 à la courbe au point d'abscisse 2.

Ex 4 : ***COURS***

Justifier que la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

Correction :

Ex 1 :

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes (sans préciser les ensembles sur lesquels les calculs sont valables)

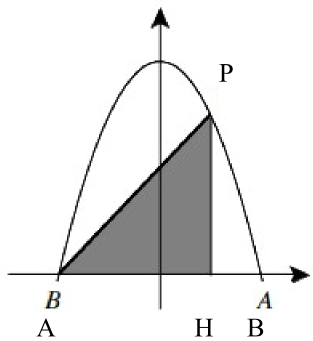
$f(x)=4x^3+\frac{5}{x^7}$ et $g(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)(3x^2-2)$ (Présenter les résultats sous forme de quotient , c'est à dire après avoir mis au même dénominateur)

$$f\,'(x)=12x^2-\frac{35}{x^8}=\frac{12x^{10}-35}{x^8}$$

$$g\,'(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)'(3x^2-2)+\left(x+\frac{1}{x}\right)(3x^2-2)'=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)(3x^2-2)+\left(x+\frac{1}{x}\right)6x=3x^2-2-3+\frac{2}{x^2}+6x^2+6=9x^2+\frac{2}{x^2}+1$$

Ce qui donne $g\,'(x)=\frac{9x^4+x^2+2}{x^2}$

Ex 2 :



La parabole d'équation $y=-\frac{2}{9}x^2+8$ coupe l'axe des abscisses en A et B.

Le point $\mathrm{P}(x\,;y)$ se déplace sur la parabole entre A et B.

Le but du problème est de déterminer **<u>les coordonnées du point P</u>** pour que l'aire du triangle rectangle grisé soit maximale.

1) Déterminer les coordonnées des points A et B.

$$-\frac{2}{9}x^2+8=0 \iff \frac{2}{9}x^2=8 \iff x^2=36 \iff x=-6 \text{ ou } x=6$$

2) On note $f(x)$, l'aire du triangle en fonction de x .

a) Déterminer l'ensemble de définition de f .

$D_f=[-6;6]$

b) Montrer que $f(x)=-\frac{1}{9}x^3-\frac{2}{3}x^2+4x+24$

Pour tout $x\in[-6;6]$, on a :

$$f(x)=\frac{\mathrm{AH}\times\mathrm{HP}}{2}=\frac{(6+x)\left(-\frac{2}{9}x^2+8\right)}{2}=(6+x)\left(-\frac{1}{9}x^2+4\right)=-\frac{2}{3}x^2+24-\frac{1}{9}x^3+4x=-\frac{1}{9}x^3-\frac{2}{3}x^2+4x+24$$

3) Etudier les variations de f .

f est une fonction polynôme, donc dérivable sur son ensemble de définition.

Pour tout $x\in[-6;6]$, on a : $f\,'(x)=-\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x+4$

$f\,'(x)=0 \iff x^2+4x-12=0 \iff x=2$ ou $x=-6$ (solutions évidentes)

x	-6		2		6
$f\,'(x)$	0	+	0	-	
f		↗		↘	

4) Répondre au problème posé.

L'aire maximale est obtenue au point $\mathrm{P}\left(2,\frac{64}{9}\right)$

Ex 3 : **ATTENTION … vérifier plusieurs fois la dérivée avant de poursuivre l'exercice** (on trouve $f'(x)=\frac{-5-x}{2\sqrt{x}(x-5)^2}$ …)

f est la fonction définie sur $[0\,;5[$ par :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-5}-\frac{2}{3}$$

On note C la courbe représentant f dans un repère.

1) Déterminer la fonction dérivée de f sur $]0\,;5[$. (En justifiant la dérivabilité . On admet que f n'est pas dérivable en 0)

f est dérivable sur $]0\,;5[$ par quotient et somme de fonctions dérivables sur $]0\,;5[$.

Pour tout $x \in\ ]0\,;5[$, on obtient : $f\,'(x)=\frac{(\sqrt{x})\,'(x-5)-\sqrt{x}(x-5)\,'}{(x-5)^2}=\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x-5)-\sqrt{x}}{(x-5)^2}=\frac{(x-5)-2\sqrt{x}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x-5)^2}=\frac{-5-x}{2\sqrt{x}(x-5)^2}$

2) La courbe C admet-elle une tangente horizontale ?
Si oui, en quel point ?

L'équation $f\,'(x)=0$ n'admet pas de solution sur $[0\,;5[$.
Donc la courbe C n'admet pas de tangente horizontale.

3) Déterminer le tableau de variation de f

Sur $[0\,;5[$, $f\,'(x)<0$.

x	0		5
$f\,'(x)$	||	-	||
f		$\searrow$	||

4) Déterminer l'équation de la tangente T_2 à la courbe au point d'abscisse 2.

On a $f\,'(2)=\frac{-7\sqrt{2}}{36}$ et $f(2)=\frac{-\sqrt{2}-2}{3}$

T_2 a pour équation :

$y=f\,'(2)(x-2)+f(2) \Leftrightarrow y=\frac{-7\sqrt{2}}{36}(x-2)-\frac{\sqrt{2}+2}{3}$

Ex 4 : COURS

Justifier que la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

Pour $h>0$, $t(h)=\frac{\sqrt{h}}{h}=\frac{1}{\sqrt{h}}$, donc $\lim_{h\to 0} t(h)=+\infty$, ce qui n'est pas un réel...

Donc $f : x \longmapsto \sqrt{x}$, n'est pas dérivable en 0.