1ères S01, S12

Devoir Surveillé n ° 6

Barème :
1) 4 pts
2) 3 pts
3) 5 pts
4) 3 pts
5) 5 pts

- Durée 2 h
- Une seule calculatrice autorisée

Exercice 1 : (4 points)

Lors d'une expérience, on connaît les probabilités de deux événements A et B : $p(A)=0{,}6$, $p(B)=0{,}3$. On connaît également $p(A\cap\overline{B})=0{,}5$.

1. Faire une figure représentant la situation et y indiquer les probabilités données.
2. Calculer :
   a) $p(A\cap B)$.
   b) $p(A\cup B)$.
   c) $p(\overline{A}\cap\overline{B})$.

Exercice 2 : (3 points)

On lance un dé cubique pipé, sans équiprobabilité d'apparition de chaque face. Les faces sont numérotées de 1 à 6.
On désigne par P_n la probabilité de voir apparaître, sur le dessus, la face marquée du nombre « n » $(1\leqslant n\leqslant 6)$.
On sait que $P_1=\frac{1}{12}$ et que, pour tout n élément de {1,2,3,4,5,6}, on a : $P_{n+1}=P_n+r$, où r est une constante réelle fixée.

1. Exprimer P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 et P_6 en fonction de P_1 et r.
   (Aide : on obtient $P_6=P_1+5r$ ...)
2. a) Calculer en fonction de P_1 et de r la somme : $S=P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6$.
   b) Montrer que $r=\frac{1}{30}$ et en déduire la valeur de chacune des probabilités P_n , pour n élément de {2,3,4,5,6}.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

Exercice 3 : (5 points)

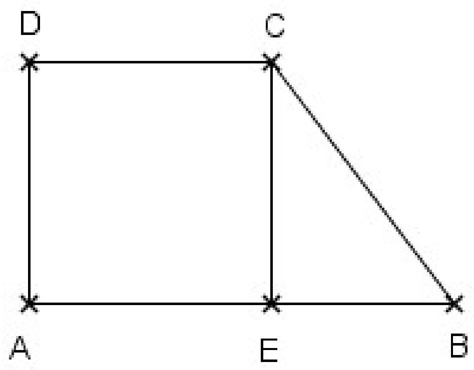
Saâd dispose, dans sa playlist, de 80 morceaux de musique, dont $\frac{1}{8}$ sont interprétés en Anglais, les autres en Français ou en Arabe.
Il y a cinq fois plus de chansons chantées en Français qu'en Anglais .
Tous les matins, en allant au lycée, il a le temps d'écouter une chanson et il utilise la fonction “choix aléatoire” de son lecteur MP3.
Son père lui propose un jeu :
$-$si la chanson écoutée est en Arabe, son père lui donne x^2 pièces de 10 Dhs,
$-$si la chanson écoutée est en Français, son père lui donne $3x$ pièces de 10 Dhs,
$-$si la chanson écoutée est en Anglais, Saâd reverse x^3 pièces de 10 Dhs à son père.
Ainsi défini, $x\geqslant 0$.
On note X la variable aléatoire correspondant au gain obtenu par Saâd à ce jeu.

1. On suppose que $x=2$.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Quel est le gain moyen de ce jeu ? Quelle interprétation peut-on en faire ?

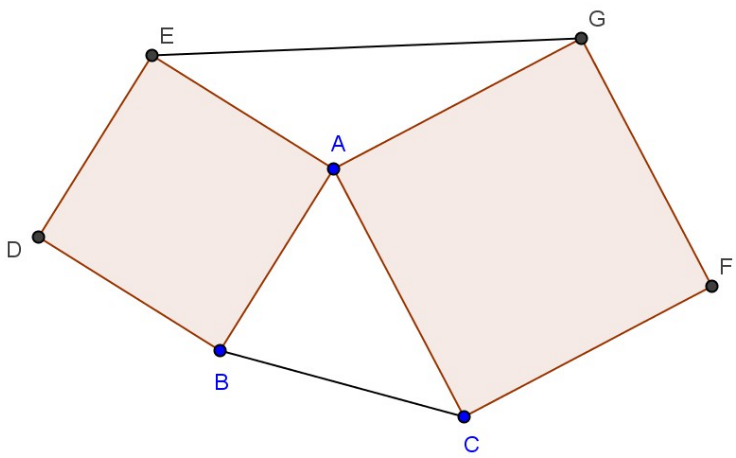
2. On cherche à déterminer la valeur x_0 de x telle que le gain moyen réalisé sur un grand nombre de tirages soit maximal. Le résultat sera arrondi au dirham.
   a) Montrer que le problème posé revient à étudier les variations de la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{5}{4}(-x^3+2x^2+15x)$.
   b) Étudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$.
   c) Déterminer x_0 . En déduire le gain moyen maximal de ce jeu.

Exercice 4 : (3 points)
Le trapèze rectangle de la figure ci-contre est tel que : AB = 7, AD = 4, CD = 4.
Donner, sans justification, les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{CD}$,
2. $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AC}$,
3. $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CA}$,
4. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$,
5. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$,
6. $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB}$.



Exercice 5 : (5 points)
ABC est un triangle, ABDE et ACFG sont deux carrés comme disposés sur la figure ci-dessous.



1. a) Etablir une relation entre les angles $\widehat{EAG}$ et $\widehat{BAC}$.
   En déduire que $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
   b) Sachant que $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AB}$, démontrer que (EC) et (BG) sont perpendiculaires.
2. a) Démontrer que $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}$.
   b) En tenant compte de la décomposition des vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BG}$ de la question 1.b), calculer EC^2 et BG^2 . Que peut-on en déduire ?