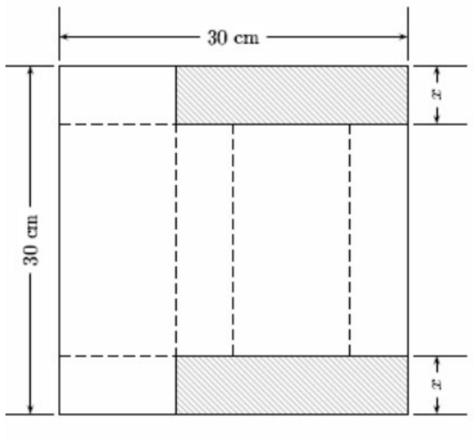
1èreS **Devoir Surveillé n ° 5**
- Durée 1 h
- Calculatrices autorisées

Barème :	**Nom :**
1) 10 pts **2)** 10 pts	

Commentaires : *Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées .Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage …*

Ex 1 :

Partie A On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-30x^2+225x$



1) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

2) Dresser le tableau de variation de f

Partie B Un fabricant envisage la production de boîtes de lait en carton obtenues en découpant deux bandes (hachurées sur le dessin) de même largeur x (cm) dans une feuille carrée de côté 30 cm et en pliant suivant les pointillés.

1) Quelles valeurs peut prendre x ?

2) Déterminer le volume V(7) de la boîte lorsque $x=7$.

3) Exprimer le volume $V(x)$ de la boîte (en cm3) en fonction de x .

4) Exprimer $V(x)$ en fonction de $f(x)$.

5) Pour quelle valeur de x le volume de la boîte est-il maximal ?

6) Le fabricant veut obtenir des boîtes à base carrée. Quelle valeur de x doit-il prendre ?

Ex 2 :

Soit la fonction f définie par $f(x)=(\sqrt{x}-x)x^4$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f .

2) Justifier que f est au moins dérivable sur $]0;+\infty[$, puis montrer que la dérivée de f peut s'écrire sous la forme $f'(x)=\dfrac{x^4(a-b\sqrt{x})}{c\sqrt{x}}$ où a , b et c sont des réels positifs à déterminer.

3) Justifier que f est aussi dérivable en 0.

4) Que peut-on en déduire pour la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0 ? Donner l'équation de cette tangente.

5) La courbe C_f possède-t-elle une tangente horizontale en un autre point ? Si oui, donner l'abscisse de ce point ?

Correction :

Ex 1 :

Partie A On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-30x^2+225x$

1) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

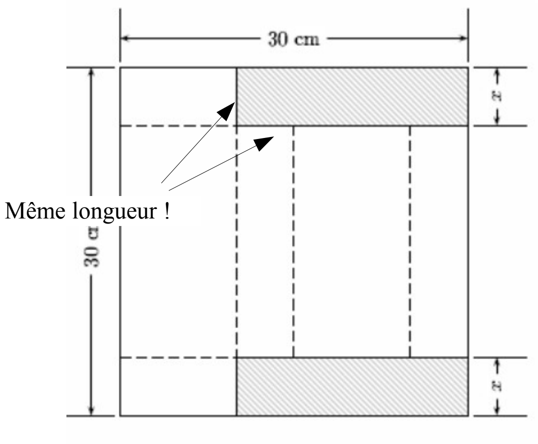
f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $f'(x)=3x^2-60x+225$

2) Dresser le tableau de variation de f

$\Delta=(-60)^2-4\times3\times225=900$
$\Delta>0$, donc l'équation $f'(x)=0$ admet deux solutions distinctes.
$x_1=\dfrac{60-30}{6}=5$ et $x_2=\dfrac{60+30}{6}=15$

x	$-\infty$		5		15		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
f		↗	500	↘	0	↗	

Partie B Un fabricant envisage la production de boîtes de lait en carton obtenues en découpant deux bandes (hachurées sur le dessin) de même largeur x (cm) dans une feuille carrée de côté 30 cm et en pliant suivant les pointillés.



1) Quelles valeurs peut prendre x ?

$0<x<15$

2) Déterminer le volume V(7) de la boîte lorsque $x=7$.

On obtient un parallélépipède rectangle :
- de longueur : $\dfrac{30-2\times7}{2}=8$ cm
- de largeur : 7 cm
- de hauteur : $30-2\times7=16$ cm

On obtient V(7)=8 × 7 × 16=896 cm^3

3) Exprimer le volume $V(x)$ de la boîte (en cm3) en fonction de x.

On obtient un parallélépipède rectangle :
- de longueur : $\dfrac{30-2\times x}{2}=15-x$ cm
- de largeur : x cm
- de hauteur : $30-2x$ cm

On obtient $V(x)=(15-x)x(30-2x)=(15x-x^2)(30-2x)=450x-30x^2-30x^2+2x^3 = 2x^3-60x^2+450x$

4) Exprimer $V(x)$ en fonction de $f(x)$

On obtient $V(x)=2f(x)$

5) Pour quelle valeur de x le volume de la boîte est-il maximal ?

Pour $x=5$ cm

6) Le fabricant veut obtenir des boîtes à base carrée. Quelle valeur de x doit-il prendre ?

$\frac{30}{4}=7,5$

<u>Ex 2 :</u>

Soit la fonction f définie par $f(x)=(\sqrt{x}-x)x^4$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
$D_f=\mathbb{R}+$

2) Justifier que f est au moins dérivable sur $]0;+\infty[$, puis montrer que la dérivée de f peut s'écrire sous la forme $f'(x)=\frac{x^4(a-b\sqrt{x})}{c\sqrt{x}}$ où a , b et c sont des réels positifs à déterminer.

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ par produit et somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.

Pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=(\sqrt{x}-x)'x^4+(\sqrt{x}-x)(x^4)'=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-1\right)x^4+(\sqrt{x}-x)4x^3=\frac{x^4-2\sqrt{x}x^4}{2\sqrt{x}}+\frac{(2x-2x\sqrt{x})(4x^3)}{2\sqrt{x}}$

On obtient $f'(x)=\frac{9x^4-10\sqrt{x}x^4}{2\sqrt{x}}=\frac{x^4(9-10\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

3) Justifier que f est aussi dérivable en 0.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{h}-h)h^4}{h}=\lim_{h\to 0}(\sqrt{h}-h)h^3=0$$

Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$

4) Que peut-on en déduire pour la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0 ? Donner l'équation de cette tangente.

La tangente est horizontale et a pour équation $y=f(0)$, c'est-à-dire $y=0$

5) La courbe C_f possède-t-elle une tangente horizontale en un autre point ? Si oui, donner l'abscisse de ce point ?

Pour $x>0$, on a :
$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^4(9-10\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}=0 \Leftrightarrow 9-10\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{9}{10} \Leftrightarrow x=\frac{81}{100}$
Donc C_f possède une autre tangente horizontale au point d'abscisse $0,81$