1èreS **Devoir Surveillé n ° 4** - Durée 1 h - Calculatrices autorisées	**Barème :** **1)** 4 pts **2)** 4 pts **3)** 4 pts **4)** 4 pts **4)** 4 pts	**Nom :**

Commentaires : *Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées .Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage …*

Ex 1 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Sur un écran radar, on repère un avion par un point M tel que $OM=r$ et tel que $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ a pour mesure principale α .
Déterminer la zone où se trouve l'avion si :

1) $\begin{cases} 2\leqslant r\leqslant 3 \\ -\frac{\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant\frac{2\pi}{3} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2\leqslant r \\ \frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{7\pi}{6} \end{cases}$ (Faire un dessin dans chaque cas)

Ex 2 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\sin(3x)=\cos(2x)$
2) Déterminer les solutions appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$

Ex 3 :

Simplifier $A=\cos(2\pi-x)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$ et $B=\cos^2\left(\frac{\pi}{15}\right)+\sin^2\left(\frac{16\pi}{15}\right)$

Ex 4 :

f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+2}-2$$

On note C la courbe représentant f dans un repère.

1) Déterminer la fonction dérivée de f. (En justifiant la dérivabilité)

2) La courbe C admet-elle une tangente horizontale ?
Si oui, en quel point ?

Ex 5 :

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{3x+7}{x^2+1} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{-7x^2+3x}{x^2+1}$$

1) Calculer, pour tout réel x, $f(x)-g(x)$

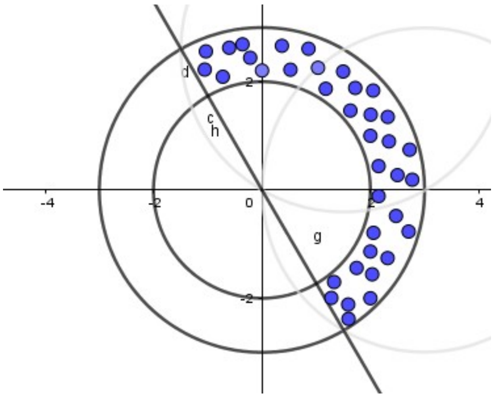
2) En déduire que pour tout réel x, $f'(x)=g'(x)$, sans calculer ces deux dérivées.

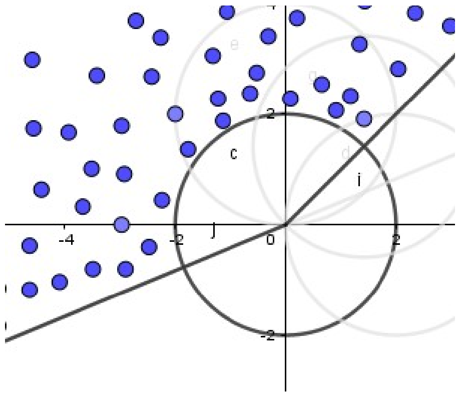
Correction :

Ex 1 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Sur un écran radar, on repère un avion par un point M tel que $OM=r$ et tel que $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ a pour mesure principale α.
Déterminer la zone où se trouve l'avion si :

1) $\begin{cases} 2\leqslant r\leqslant 3 \\ -\frac{\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant\frac{2\pi}{3}\end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2\leqslant r \\ \frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{7\pi}{6}\end{cases}$ (Faire un dessin dans chaque cas)





Ex 2 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\sin(3x)=\cos(2x)$
2) Déterminer les solutions appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\sin(3x)=\cos(2x) &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=\cos(2x)\\ &\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}-3x+2k\pi \text{ ou } 2x=-\frac{\pi}{2}+3x+2k'\pi \quad (k\in\mathbb{Z},\ k'\in\mathbb{Z})\\ &\Leftrightarrow 5x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ ou } -x=-\frac{\pi}{2}+2k'\pi \quad (k\in\mathbb{Z},\ k'\in\mathbb{Z})\\ &\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5} \text{ ou } x=\frac{\pi}{2}+2k'\pi \quad (k\in\mathbb{Z},\ k'\in\mathbb{Z})\end{aligned}$$

2) Déterminer les solutions appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$

$$-\pi<\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}\leqslant\pi \Leftrightarrow -\pi-\frac{\pi}{10}<\frac{2k\pi}{5}\leqslant\pi-\frac{\pi}{10} \Leftrightarrow \frac{-11\pi}{10}<\frac{2k\pi}{5}\leqslant\frac{9\pi}{10} \Leftrightarrow \frac{-11}{4}<k\leqslant\frac{9}{4}$$

Comme k est un entier, on obtient $k=-2$, $k=-1$, $k=0$, $k=1$ et $k=2$, ce qui donne :

$\frac{-7\pi}{10}$, $\frac{-3\pi}{10}$, $\frac{\pi}{10}$, $\frac{5\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$ et $\frac{9\pi}{10}$

Pour les solutions du type $x=\frac{\pi}{2}+2k'\pi$, la seule solution possible dans $]-\pi\,;\pi]$ est bien sûr $\frac{\pi}{2}$

Donc S = { $\frac{-7\pi}{10}$, $\frac{-3\pi}{10}$, $\frac{\pi}{10}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{9\pi}{10}$ }

Ex 3 :

Simplifier $A=\cos(2\pi-x)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$ et $B=\cos^2\left(\frac{\pi}{15}\right)+\sin^2\left(\frac{16\pi}{15}\right)$

$A=\cos(-x)-2\cos(x)-\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}+2\pi\right)=\cos(x)-2\cos(x)-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos(x)-\cos(x)=-2\cos(x)$

$B=\cos^2\left(\frac{\pi}{15}\right)+\sin^2\left(\frac{16\pi}{15}\right)$ Comme $\sin\left(\frac{16\pi}{15}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{15}\right)$, on obtient $B=\cos^2\left(\frac{\pi}{15}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{15}\right)=1$

Ex 4 :

f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+2}-2$$

On note C la courbe représentant f dans un repère.
1) Déterminer la fonction dérivée de f. (En justifiant la dérivabilité)
2) La courbe C admet-elle une tangente horizontale ?
Si oui, en quel point ?

1) f est dérivable sur $]0;+\infty[$ par quotient et somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.

Pour tout $x>0$, on obtient : $f'(x)=\frac{(\sqrt{x})'(x+2)-\sqrt{x}(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x+2)-\sqrt{x}}{(x+2)^2}=\frac{(x+2)-2\sqrt{x}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x+2)^2}=\frac{2-x}{2\sqrt{x}(x+2)^2}$

2) $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$
C admet donc une tangente horizontale au point $A(2;f(2))$ où $f(2)\approx-1{,}65$ (à 0,01 près)

Ex 5 :

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{3x+7}{x^2+1} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{-7x^2+3x}{x^2+1}$$

1) Calculer, pour tout réel x, $f(x)-g(x)$

2) En déduire que pour tout réel x, $f'(x)=g'(x)$, sans calculer ces deux dérivées.

1) Pour tout réel x, on a : $f(x)-g(x)=\frac{3x+7+7x^2-3x}{x^2+1}=\frac{7(x^2+1)}{x^2+1}=7$

2) Ces deux fonctions rationnelles sont définies sur $\mathbb{R}$ et diffèrent d'une constante, on en déduit qu'elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et qu'elles ont la même dérivée.